円錐曲線について(2)

小室（こむろ）　久二雄（くにお）

第２章　平面上の問題に還元する方法

ここでは，円錐の平面による切り口を，円錐の軸を含み切り口の平面に垂直な平面上で考える．

円錐　$x^2+y^2=z^2\tan^2\alpha \quad \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ ……①

切り口の平面　$y\cos\theta+z\sin\theta=p \quad \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ ……②

を，円錐の軸（z 軸）を含み，切り口の平面に垂直な平面すなわち yz 平面上で考える．なお，ここでは y 軸のかわりに x 軸を，z 軸のかわりに y 軸を用い，使い慣れている xy 平面上で考えることにする．

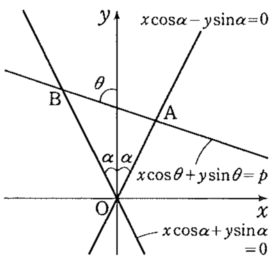
①, ② と yz 平面との交線はそれぞれ

$$x\cos\alpha\pm y\sin\alpha=0$$
$$x\cos\theta+y\sin\theta=p$$

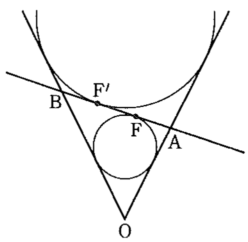
である．楕円の場合を考えれば，２点A, Bを右の図１のように定義すると

$$\mathrm{AB}=(\text{長軸})$$

である．更に，△OABの内接円，傍接円と AB との接点を F, F′ とすると，F, F′ がこの楕円の焦点である．本章の目的は，これらの性質を利用して，①, ② の交線の図形の長軸，短軸の長さ，焦点間の距離等を求めることである．



（図１）



（図２）

（Ｉ）　$\alpha<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$　（楕円）のとき

図１の点Aの座標は

$$\begin{cases} x\cos\alpha-y\sin\alpha=0 \\ x\cos\theta+y\sin\theta=p \end{cases}$$

を解くことより

$$\mathrm{A}\left(\frac{p\sin\alpha}{\sin(\theta+\alpha)},\ \frac{p\cos\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}\right)$$

更に α を $-\alpha$ にかえて

$$\mathrm{B}\left(\frac{-p\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)},\ \frac{p\cos\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}\right)$$

ここで，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{p}{\sin(\theta+\alpha)}(\sin\alpha,\ \cos\alpha) \quad \text{より}$$

$$\mathrm{OA}=\frac{p}{\sin(\theta+\alpha)}$$

同様に

$$\mathrm{OB}=\frac{p}{\sin(\theta-\alpha)}$$

次に AB の長さを求める．　　← 注意Ｉ

余弦定理より

$$\begin{aligned}
\mathrm{AB}^2&=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos2\alpha \\
&=\frac{p^2}{\sin^2(\theta+\alpha)}+\frac{p^2}{\sin^2(\theta-\alpha)} \\
&\quad -2\frac{p}{\sin(\theta+\alpha)}\cdot\frac{p}{\sin(\theta-\alpha)}(1-2\sin^2\alpha) \\
&=p^2\frac{P}{\sin^2(\theta+\alpha)\sin^2(\theta-\alpha)}
\end{aligned}$$

[ただし　$P=\sin^2(\theta-\alpha)+\sin^2(\theta+\alpha)$
$-2\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta-\alpha)$
$+4\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta-\alpha)\sin^2\alpha$]

$$P=\{\sin(\theta+\alpha)-\sin(\theta-\alpha)\}^2+4\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta-\alpha)\sin^2\alpha \quad \cdots\cdots (*)$$

$$\left[\begin{aligned}
&\sin(\theta+\alpha)-\sin(\theta-\alpha)=2\cos\theta\sin\alpha \\
&\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta-\alpha)=\frac{1}{2}(\cos2\alpha-\cos2\theta) \\
&\qquad=\frac{1}{2}(1-2\sin^2\alpha-1+2\sin^2\theta) \\
&\qquad=\sin^2\theta-\sin^2\alpha
\end{aligned}\right]$$

$$\begin{aligned}
(*)&=(2\cos\theta\sin\alpha)^2+4\sin^2\alpha(\sin^2\theta-\sin^2\alpha) \\
&=4\sin^2\alpha(\cos^2\theta+\sin^2\theta-\sin^2\alpha) \\
&=4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\sin^22\alpha
\end{aligned}$$

$\therefore$ AB＝(長軸)$=\dfrac{p\sin 2\alpha}{\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta-\alpha)}$

$$=\frac{p\sin 2\alpha}{\sin^2\theta-\sin^2\alpha}$$

次に，図 2 の焦点 F，F′ について，

$FF'=OB-OA$ ← 注意 2

が成り立つから

$$FF'=\frac{p}{\sin(\theta-\alpha)}-\frac{p}{\sin(\theta+\alpha)}$$

$$=\frac{p\{\sin(\theta+\alpha)-\sin(\theta-\alpha)\}}{\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta-\alpha)}$$

$$=\frac{2p\cos\theta\sin\alpha}{\sin^2\theta-\sin^2\alpha}$$

$\therefore$ $\dfrac{FF'}{2}$＝(中心と焦点間の距離)

$$=\frac{p\cos\theta\sin\alpha}{\sin^2\theta-\sin^2\alpha}$$

更に

$$\left(\frac{\text{短軸}}{2}\right)^2=\left(\frac{p\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\theta-\sin^2\alpha}\right)^2-\left(\frac{p\cos\theta\sin\alpha}{\sin^2\theta-\sin^2\alpha}\right)^2$$

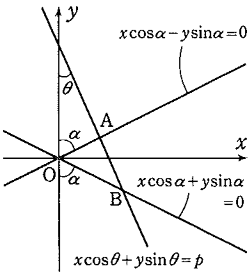
$$=\frac{p^2\sin^2\alpha(\cos^2\alpha-\cos^2\theta)}{(\sin^2\theta-\sin^2\alpha)^2}$$

$$=\frac{p^2\sin^2\alpha}{\sin^2\theta-\sin^2\alpha}$$

$\therefore$ (短軸)$=\dfrac{2p\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\theta-\sin^2\alpha}}$

(II) $0\leqq\theta<\alpha$ (双曲線) のとき

直線の方程式は(Ｉ)の場合と変わらないので，2 点 A，B を右の図のように定めると



$$A\left(\frac{p\sin\alpha}{\sin(\theta+\alpha)},\ \frac{p\cos\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}\right)$$

$$B\left(\frac{-p\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)},\ \frac{p\cos\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}\right)$$

ここで，$\theta<\alpha$ に注意すると

$$OA=\frac{p}{\sin(\alpha+\theta)}$$

$$OB=\frac{p}{\sin(\alpha-\theta)}$$

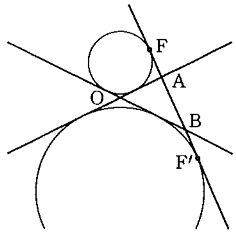
更に

AB＝(頂点間の距離)

$$=\frac{p\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha-\sin^2\theta}$$

を得る．

次に右の図の焦点 F，F′(F，F′ は △OAB の傍接円と直線 AB との接点）について，



$FF'=OA+OB$

← 注意 3

が成り立つから

$$FF'=\frac{p}{\sin(\alpha+\theta)}+\frac{p}{\sin(\alpha-\theta)}$$

$$=\frac{p\{\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha-\theta)\}}{\sin(\alpha+\theta)\sin(\alpha-\theta)}$$

$$=\frac{2p\sin\alpha\cos\theta}{\sin^2\alpha-\sin^2\theta}$$

$\therefore$ FF′＝(焦点間の距離)

$$=\frac{2p\sin\alpha\cos\theta}{\sin^2\alpha-\sin^2\theta}$$

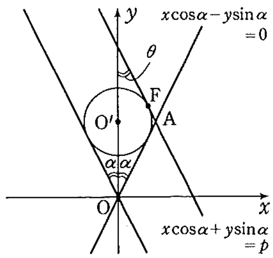
(III) $\theta=\alpha$ (放物線) のとき

2 直線

$x\cos\alpha-y\sin\alpha=0$

$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$

の交点を A とすると



$$x=\frac{p}{2\cos\alpha},$$

$$y=\frac{p}{2\sin\alpha}$$

であるから

$$A\left(\frac{p}{2\cos\alpha},\ \frac{p}{2\sin\alpha}\right)$$

更に，

$$\overrightarrow{OA}=\frac{p}{\sin 2\alpha}(\sin\alpha,\ \cos\alpha)$$

より

$$OA=\frac{p}{\sin 2\alpha}$$

次に，放物線の焦点Fについて，

$AF=\dfrac{O'A^2}{OA}$ ← 注意 4

(O′ は 3 本の直線に接する円の中心)

が成り立つから

$$AF=\frac{\dfrac{p^2}{4\cos^2\alpha}}{\dfrac{p}{\sin 2\alpha}}=\frac{p}{2}\tan\alpha$$

$\therefore$ (頂点と焦点の距離)$=\dfrac{p}{2}\tan\alpha$

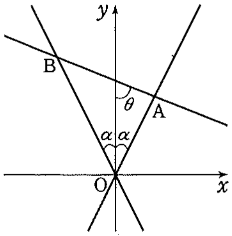
注意1　通常は AB の長さを求めるのに

$$\angle B=\theta-\alpha$$

であるから，正弦定理より

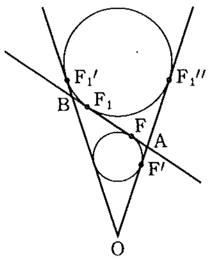
$$AB=\frac{OA\sin 2\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$$

$$=\frac{p\sin 2\alpha}{\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta-\alpha)}$$



のようにするのであるが，本文に述べた程度の計算を授業で行うことも必要（エレガントな解法ばかり追い求め，計算が少し繁雑になるとすぐあきらめる等ねばり強く最後まで計算する生徒が少ないという理由から）と思うので，敢えて本文では繁雑な方法で述べた．

注意2　△OAB の内接円，傍接円の接点を右の図のように F，F′，F_1，F_1'，F_1'' とする．



このとき，

$$2s=OA+OB+AB$$

とおくと

$$2AF=AF+AF'$$
$$=2s-(BF+OB+OF')$$
$$=2s-2OB$$
$$=OA+AB-OB$$

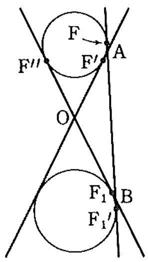
また

$$2OF_1'=OF_1'+OF_1''=2s$$

$$\therefore\ 2BF_1=2OF_1'-2OB$$
$$=2s-2OB$$
$$=OA+AB-OB$$

$$\therefore\ FF_1=AB-(AF+BF_1)$$
$$=AB-(OA+AB-OB)$$
$$=OB-OA$$

注意3　△OABの傍接円の接点を右の図のように F，F′，F″，F_1，F_1' とする．



このとき，

$$2s=OA+OB+AB$$

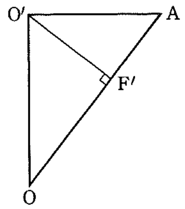
とおくと

$$2BF=BF+BF''$$
$$=2s$$

同様に　$AF_1'=s$

$$\therefore\ FF_1'=BF+AF_1'-AB$$
$$=2s-AB$$
$$=OA+OB$$

注意4　△O′OA において，O′ から OA に垂線を下ろし，その足を F′ とすると



$$\triangle O'AF' \backsim \triangle OAO'$$

であるから

$$AF' : AO' = AO' : AO$$

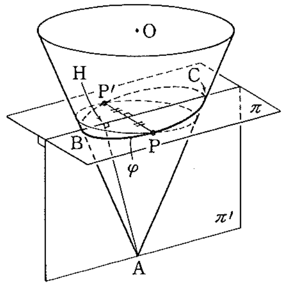
$$\therefore\ AF'=\frac{O'A^2}{OA}$$

第3章　切り口の平面に座標軸を導入する方法(*)

この章の目的は，切り口の平面に座標軸を導入し，その座標軸上で曲線の満たす方程式を求めることである．

まず，この章で議論を進める上で基本となる次の命題を述べる．

命題4　直円錐Sを頂点Aを含まない平面πで切ったときの切り口の図形は，直円錐の軸 AO を含み，かつπに垂直な平面 π' とπの交線に関して対称である．



証明　円錐の頂点Aから平面πに垂線を下ろし，その足をHとする．このとき，2直線 AO，AH の決める平面が π' である．

πと円錐との交線をφとすると，φ上の任意の点Pの2平面π，π' の交線 BC (B，C は π' と曲線φの交点とする）に関する対称点がφ上にあることを示せばよい．

Pの直線 BC に関して対称な点を P′ とする．このとき

$$PP'\perp BC \qquad \cdots\cdots ①$$

P′ は，点Pと直線 BC の決める平面π上にあるから

$$PP'\perp AH \qquad \cdots\cdots ②$$

（＊）　この章の内容は，多くの点で[4]を参考にした．この場をかりてお礼を申し上げる．

①, ② より

$$\mathrm{PP}' \perp \pi' \quad \cdots\cdots \text{③}$$

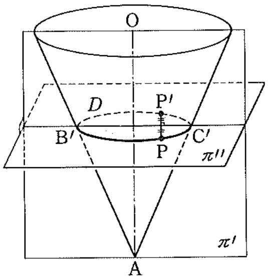
ところで，π' は底面に垂直な直線 AO を含むから

$$\pi' \perp (\text{円錐の底面}) \quad \cdots\cdots \text{④}$$

したがって，③, ④ より

$$\mathrm{PP}' \parallel (\text{円錐の底面})$$

が成り立つ．そこで，P，P′ を含む底面に平行な平面を π''，π'' と円錐の交線を円Dとする．このとき，2点 P，P′ は π' に関して対称であることと，π' と円Dの交点を B′，C′ とすると B′C′ は円Dの直径である（なぜなら π' は円錐の軸 AO を含むから）ことを考え合わせ，P，P′ は円Dの直径 B′C′ に関して対称である．

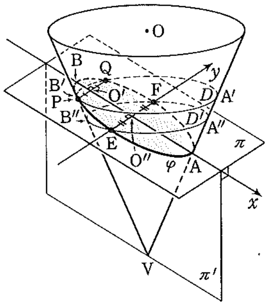


よって，点 P′ は円D上すなわち円錐上の点である．更に，P′ は π 上の点でもあるから，点 P′ は π と円錐の交線 φ 上の点である．　[証明終]

命題4を利用して，各場合における切り口の曲線の方程式を求める．

（Ⅰ）平面が円錐のすべての母線と交わるとき

円錐の軸 VO を含み π と垂直な平面を π' とし，π' と曲線 φ との交点を A，B とする．更に，直線 AB を x 軸，AB の垂直二等分線を y 軸，y 軸と曲線 φ との交点を E，F とする．ここで，AB$=2a$，EF$=2b$ とおく．曲線上の点を P$(x,\ y)$，P を通り VO に垂直な平面と円錐との交線を円Dとする．命題4より点Pの対称軸 AB に関して対称な点Qは円D上にあり，同様に2点 E，F は底面に平行な円 D' 上にある．また，π' と円Dとの交点を A′，B′，π' と円 D' との交点を A″，B″，更に AB と PQ，EF との交点をそれぞれ O′，O″ とする．



このとき，円 D，D' における方べきの定理より

$$\mathrm{PO'}^2=\mathrm{A'O'}\cdot\mathrm{B'O'},\quad \mathrm{EO''}^2=\mathrm{A''O''}\cdot\mathrm{B''O''}$$

$$\therefore\quad \mathrm{PO'}^2:\mathrm{EO''}^2=\mathrm{A'O'}\cdot\mathrm{B'O'}:\mathrm{A''O''}\cdot\mathrm{B''O''} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

ここで $\triangle\mathrm{AA'O'}$，$\triangle\mathrm{BB''O''}$ に注目すれば

$$\mathrm{A''O''}\parallel\mathrm{A'O'},\quad \mathrm{B''O''}\parallel\mathrm{B'O'}$$

であるから

$$\mathrm{A'O'}:\mathrm{A''O''}=\mathrm{AO'}:\mathrm{AO''},$$

$$\mathrm{B'O'}:\mathrm{B''O''}=\mathrm{BO'}:\mathrm{BO''} \quad \cdots\cdots \text{②}$$

①, ② より

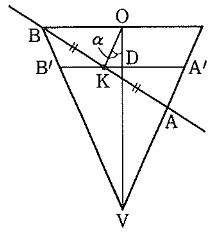
$$\mathrm{PO'}^2:\mathrm{EO''}^2=\mathrm{AO'}\cdot\mathrm{BO'}:\mathrm{AO''}\cdot\mathrm{BO''}$$

ここで，P$(x,\ y)$，BO″$=a$，EO″$=b$ であるから

$$y^2:b^2=(a+x)(a-x):a^2$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

注意　だ円の中心Kは AB の中点であるから，π' 上で考えれば，中点連結定理より OK∥VA であるから，Kは円錐の軸上にあるわけではない．

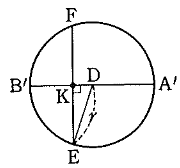


更に，AB の中点Kを通り VO に垂直な平面と円錐との交線である円D上で考える．円Dの半径を r，$\angle\mathrm{KOV}=\alpha$ とおくと

$$\mathrm{EK}^2=\mathrm{ED}^2-\mathrm{KD}^2$$

$$=r^2-(\mathrm{OD}\tan\alpha)^2$$

となる．



$\therefore$ 2EK$=$(短軸の長さ)

$$=2\sqrt{r^2-\mathrm{OD}^2\tan^2\alpha}$$

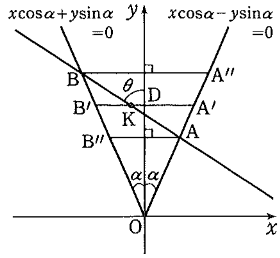
この性質を利用して，

円錐　$x^2+y^2=z^2\tan^2\alpha$

切り口の平面　$y\cos\theta+z\sin\theta=p$　$\left(\alpha<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

より得られる楕円の短軸の長さを求めると次のようになる．

π' 上で考えれば右のようになる．このとき



$$\mathrm{A}\left(\frac{p\sin\alpha}{\sin(\theta+\alpha)},\ \frac{p\cos\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}\right)$$

$$\mathrm{B}\left(\frac{-p\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)},\ \frac{p\cos\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}\right)$$

であるから，A′，A″，B′，B″ を上の図のように定

めると

$$\mathrm{A''B}=\frac{2p\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)},\quad \mathrm{AB''}=\frac{2p\sin\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}$$

であるから

$$\mathrm{A'B'}=(\text{円}D\text{の直径})=\frac{p\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}+\frac{p\sin\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}$$

$$=\frac{2p\sin\theta\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\theta-\sin^2\alpha}$$

$$\mathrm{DK}=\frac{1}{2}(\text{2 点 A, B の }y\text{ 座標の差})\tan\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{p\cos\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}-\frac{p\cos\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}\right\}\cdot\tan\alpha$$

$$=\frac{p\sin^2\alpha\cos\theta}{\sin^2\theta-\sin^2\alpha}$$

$$\therefore\ \mathrm{EK}^2=\mathrm{ED}^2-\mathrm{DK}^2$$

$$=\frac{p^2\sin^2\theta\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin^2\theta-\sin^2\alpha)^2}-\frac{p^2\sin^4\alpha\cos^2\theta}{(\sin^2\theta-\sin^2\alpha)^2}$$

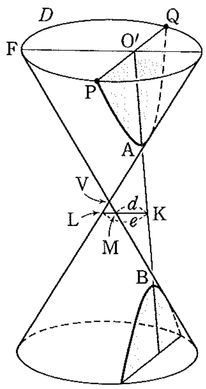
$$=\frac{p^2\sin^2\alpha(\sin^2\theta-\sin^2\alpha)}{(\sin^2\theta-\sin^2\alpha)^2}$$

$$=\frac{p^2\sin^2\alpha}{\sin^2\theta-\sin^2\alpha}$$

$$\therefore\ (\text{短軸の長さ})=2\mathrm{EK}=\frac{2p\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\theta-\sin^2\alpha}}$$

(II) 平面が円錐の 2 つの部分と交わるとき

直円錐の軸を含み切り口の平面 π に垂直な平面を π', π' と切り口の曲線 φ との交点を A, B とする.



更に, Pを通り底面に平行な平面と円錐との切り口を円 D とし, 円 D と VA, VB との交点をそれぞれ E, F, EF に関してPと対称な点をQとする.

平面 π 上で, AB を x 軸, 線分 AB の垂直二等分線を y 軸, AB$=2a$, 更に, AB の中点Kを通り, 底面に平行な平面と VA, VB との交点を L, M とし KM$=d$, KL$=e$ とする.

このとき, P$(x,\ y)$ とすると,

$$\mathrm{PO'}^2=\mathrm{EO'}\cdot\mathrm{FO'}$$

であり,

$$\mathrm{EO'}:e=\mathrm{AO'}:\mathrm{AK}$$

$$\mathrm{FO'}:d=\mathrm{BO'}:\mathrm{BK}$$

であるから

$$\mathrm{PO'}^2:de=\mathrm{EO'}\cdot\mathrm{FO'}:e\cdot d$$

$$=\mathrm{AO'}\cdot\mathrm{BO'}:\mathrm{AK}\cdot\mathrm{BK}$$

よって, $\frac{1}{2}\mathrm{AB}=a,\ de=b^2$ …… ①

とおけば

$$y^2:b^2=(x-a)(x+a):a^2$$

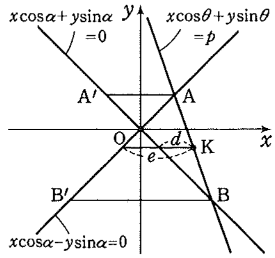
$$\therefore\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad\cdots\cdots ②$$

注意 双曲線 ② の b^2 は ① で与えられる. この性質を利用して

円錐 $x^2+y^2=z^2\tan^2\alpha$

切り口の平面 $y\cos\theta+z\sin\theta=p$ $(0\leqq\theta<\alpha)$

より得られる双曲線の ② における b^2 の値を計算すると次のようになる.



π' 上で考えれば右の図のようになる. このとき,

$$\mathrm{A}\left(\frac{p\sin\alpha}{\sin(\theta+\alpha)},\ \frac{p\cos\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}\right)$$

$$\mathrm{B}\left(\frac{-p\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)},\ \frac{p\cos\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}\right)$$

である.

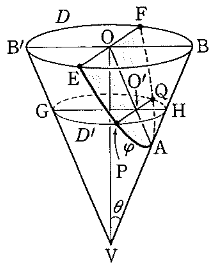
$$d=\frac{\mathrm{AA'}}{2}=\frac{p\sin\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}$$

$$e=\frac{\mathrm{BB'}}{2}=\frac{-p\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$$

$$\therefore\ b^2=de=\frac{p^2\sin^2\alpha}{\sin(\theta+\alpha)\sin(\alpha-\theta)}$$

$$=\frac{p^2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha-\sin^2\theta}$$

(III) 平面が円錐の 1 つの母線と平行なとき



円錐の軸を含み, 切り口の平面 π に垂直な平面を π', π' と切り口の曲線 φ との交点をAとする. 更に, VA の延長上に点Bを

$$\mathrm{VB}=2\mathrm{VA}$$

を満たすようにとり, Pを通る底面に平行な円 D' と曲線 φ との交点のうち, Pでない方をQ, Bを通る底面に平行な円 D と曲線 φ との交点をE, F, 円 D, D' と π' との交点を上の図のように B′, G, H, および BB′ と EF の交

点をO，GH と PQ の交点を O′ とする．
AO を x 軸，Aを原点，EF＝(円Dの直径)＝$2a$ とする．このとき，

$$PO'^2 : EO^2 = GO' \cdot HO' : EO^2$$
$$= B'O \cdot HO' : EO^2 \cdots\cdots (*)$$

(∵ 四角形 B′GO′O は平行四辺形であるから B′O＝GO′)

$$(*) = HO' : EO$$
$$= AO' : AO$$

ここで，P(x, y)，∠OVB＝θ とおくと

$$AO\sin\theta = AB\sin\theta = \frac{1}{2}a$$

$$\therefore\ AO = \frac{a}{2\sin\theta}$$

$$\therefore\ y^2 : a^2 = x : \frac{a}{2\sin\theta}$$

$$\therefore\ y^2 = 2ax\sin\theta$$

おわりに

本稿は，昭和62年度の自治医科大の入試問題を題材に数回にわたり講義したものを，一般的な場合に書き直したものです．本来は，ここで述べた一般の場合をふまえ，実際の入試問題（他に61年東大・理科，電通大，63年早大・理工）に対して多方面から検討することが大切なのですが，紙数の関係で省略いたしました．不十分な点もあるかと思いますが，高校生，受験生に対する指導に少しでも役立てていただければ幸いです．

〈参考文献〉

[1] 齋藤正彦　線型代数入門　東京大学出版会
[2] 小室久二雄　代数・幾何　オカミ書店
[3] 小室久二雄　固有値と不動だ円　数学教育 (19) 1987　304-309
[4] 岩田至康　幾何学辞典1，2　槇 書店

（清真学園高等学校）