2次方程式の解の公式について

解の公式を導く際の問題点

2次方程式の解の公式を導くには，

[1]　因数分解利用　　[2]　平方根利用

の2通りの方法があります．

以前は，[1] の方法も多かったようですが，これは難しいということで，最近は [2] の方法が多くなってきているようです．

さて，因数分解による方法では

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

から

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

となりますが，この ① から ② の変形には特に問題はありません．なぜならば，

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$$

を利用しているにすぎないからです．あとは，複素数の範囲における性質

$$\alpha\beta=0 \iff \alpha=0 \quad \text{または} \quad \beta=0$$

を用いればよいわけです．

ところで，平方根を利用する場合はどうでしょうか．教科書では，

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

ゆえに

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

とさりげなく変形することが多いのですが，この変形を説明するのは意外とたいへんです．

まず，複号の根拠が明確でなければなりません．そのためには，$x^2=k$ の解が k の符号に関係なく，$x=\pm\sqrt{k}$ であることを示しておけば簡単に済みそうな気がします．

これを用いますと，③ から

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \qquad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

よって

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|} \qquad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

となります．そして，⑥ と ④ が結果的に等しいことを説明すればよいわけですが，ちょっと面倒かもしれません．ところが，これでもまだ説明が不十分のようです．⑤ から ⑥ を導くのに，無理があります．といいますのは

$$\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

が成り立つことは，$a>0$, $b>0$ の場合しか示していないからです．つまり，⑤ から ⑥ を導くには，上の等式が，$a>0$, $b<0$ の場合にも成り立つことを示す必要があります．

このように，③ から ④ を導く説明は，厳密には，かなり面倒なものとなります．これならば，因数分解による方法の方が簡明のような気もします．

また，1つの方法としては，まず，$b^2-4ac\geqq 0$ の場合について解の公式を示し（これは中学で既習），$b^2-4ac<0$ の場合は別に扱うということも考えられます．このときは，ここで虚数を指導するのもよいのではないでしょうか．そして

$$a>0 \text{ のとき} \qquad \sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$$

を定義すれば，$b^2-4ac<0$ のときも $\sqrt{b^2-4ac}$ は意味をもつことになりますので，解の公式がそのまま使えます．

教科書の改訂に際して

教科書は，その性格上，先生方の御意見の最大公約数的な面が多く打ち出されるため，たいへん貴重な御意見であっても，その取り扱いについては思い悩むことがしばしばあります．もちろん，教科書に上のような説明を丁寧に記すことも困難です．2次方程式の解の公式の説明は，四訂版の教科書では，それぞれ特色のある書き方になりましたが，その是非につきましては，先生方の御指導を賜りたいと存じます．

（編集部）