行列の n 乗で人口の流れを分析する

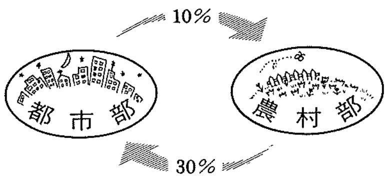
原田(はらだ)　浩史(ひろし)

1．はじめに

行列の n 乗については，大学入試で毎年多数の学校で出題され，予備校でもかなり詳しく教えられています．しかしながら，**行列の n 乗計算が実際に役立つ身近な例**を紹介してあるものはあまり見当たりません．そんな中，**行列の n 乗で人口の流れを分析する**という記事をある本で知り，自分でも代数・幾何の授業に使ってみた結果，以外と生徒の反応が良かったので，ここに報告したいと思います．

2．問題の設定 —— 人口の流れの問題

> 問題 I　ある国で都市部と農村部の人口移動を調べたところ，毎年都市部の 10 %が農村部へ，逆に農村部の 30 %が都市部へ移っているという．この国の総人口は変わらないものとして，100 年後，200 年後，…… はどうなるだろうか．



次の(ア)～(オ)のうちどれが正しいかを生徒に予想させました．

> (ア)　将来はほとんど全人口が都市へ集中する．
> (イ)　都市，農村の増減をくり返しながら，やがて一定の割合に落ち着く．
> (ウ)　ある時期は都市が増え，ある時期は農村が増えるという状態を永久にくり返し，一定の割合に落ち着くことはない．
> (エ)　はじめに何人ずつ住んでいたのかがわからないと何ともいえない．
> (オ)　(ア)～(エ)のいずれでもない．

生徒の予想は(イ), (ウ)が多く，ほぼ同数でした．

3．行列の n 乗がわかると問題は解決する

	初め	1年後	2年後 ……	n年後	
都市人口	x_0	x_1	x_2	x_n	(人)
農村人口	y_0	y_1	y_2	y_n	(人)

とします．

まず x_1, y_1 を x_0, y_0 で表すと

$$\begin{cases} x_1=0.9x_0+0.3y_0 \\ y_1=0.1x_0+0.7y_0 \end{cases}$$

となります．これを行列を使って表すと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}}_{A\text{とおく}}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

同様にして

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=A\cdot A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

以下，これをくり返して

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\quad (n=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots)\ \cdots\cdots\ ①$$

となります．したがって A^n が計算されれば，①により，n 年後の都市と農村の人口 x_n, y_n がわかるというわけです．

4．行列の n 乗の計算から問題の解決へ

A^n の計算については，生徒が高校1年生だったこともあり，次のような手順を示した上で計算させました．

(1)　$P=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．$B=P^{-1}AP$ を求める．

(2)　B^n を求める．

(3)　$A^n=(PBP^{-1})^n=PB^nP^{-1}$ となることに着目して A^n を求める．

実際に計算してみます．

(1) $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\frac{1}{10}\begin{pmatrix}9 & 3\\ 1 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix}9 & 3\\ 1 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{40}\begin{pmatrix}10 & 10\\ -6 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{40}\begin{pmatrix}40 & 0\\ 0 & 24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.6\end{pmatrix}$

(2) $B^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (0.6)^2\end{pmatrix}$

$B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (0.6)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (0.6)^3\end{pmatrix}$

これをくり返して　$B^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (0.6)^n\end{pmatrix}$

(3) $A^n=PB\underbrace{P^{-1}\cdot P}_{E}B\underbrace{P^{-1}\cdot}_{E}\cdots\cdots\underbrace{\cdot P}_{E}BP^{-1}=PB^nP^{-1}$

となるので

$A^n=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (0.6)^n\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -(0.6)^n\\ 1 & (0.6)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3+(0.6)^n & 3-3\cdot(0.6)^n\\ 1-(0.6)^n & 1+3\cdot(0.6)^n\end{pmatrix}$ となる．

$n\to\infty$ のとき $(0.6)^n\longrightarrow 0$ となるので

$n\to\infty$ のとき $A^n\longrightarrow\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ となる．

よって，$n\to\infty$ のとき

$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\longrightarrow\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$

ゆえに，$n\to\infty$ のとき

$x_n\longrightarrow\frac{3}{4}(x_0+y_0)$，$y_n\longrightarrow\frac{1}{4}(x_0+y_0)$

x_0+y_0 は全人口を表すので，**都市部の人口は全人口の75％，農村部の人口は全人口の25％に落ち着いていく**ことがわかります．(ア)～(オ)の中の(イ)が正しいことがこれでわかったことになります．

ほとんどの生徒が，教師のヒントはありましたが自分の手で計算し，正解にたどり着いたことに満足していました．

5．教材としての使用方法

行列の n 乗計算については，例えば数研出版の教科傍用の問題集に

> $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ のとき，
> $B=P^{-1}AP$ を計算し，これを用いて A^n を求めよ．

といった問題が載っています．このような問題を取り上げるときに，人口の流れの問題も合わせて取り上げると，生徒に実生活に役に立つ生き生きとした数学を伝えることができると思います．またここで述べた n 乗計算は生徒の学習の度合いを考えると少し無理だという場合でも，電卓を使いながら A^{10} ぐらいまでを計算させ，x_n，y_n の変化をグラフに表してみることはできると思います．更に，進んだ生徒には，変換行列 P をどのようにしたら作れるかという点から，固有値，固有ベクトルといった話に発展させることもできます．数列の漸化式
$x_{n+1}=ax_n+by_n$，$y_{n+1}=cx_n+dy_n$ の解法にも話をつなげることができます．固有値，固有ベクトルあるいはスペクトル分解をマスターした生徒には次のような問題を考えさせるのもよいと思います．

> 問題 2　都市部 $\underset{b\%}{\overset{a\%}{\rightleftarrows}}$ 農村部　とすると，人口の流れはどのように変化していくのか．

行列のスペクトル分解を使ってこの問題を考えてみると次のようになります．

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1-\frac{a}{100} & \frac{b}{100}\\ \frac{a}{100} & 1-\frac{b}{100}\end{pmatrix}$$

$\frac{a}{100}=p$，$\frac{b}{100}=q$ とおくと

$$A=\begin{pmatrix}1-p & q\\ p & 1-q\end{pmatrix}$$

A の固有方程式は

$x^2-(2-p-q)x+(1-p)(1-q)-pq=0$

$\therefore$　$(x-1)(x-1+p+q)=0$

$\therefore$　$x=1$，$1-p-q$

$\lambda_1=1$，$\lambda_2=1-p-q$ とおく．

$P_1=\frac{A-\lambda_2E}{\lambda_1-\lambda_2}$，$P_2=\frac{A-\lambda_1E}{\lambda_2-\lambda_1}$ とおくと

$A=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2,\ P_1{}^2=P_1,\ P_2{}^2=P_2,\ P_1P_2=P_2P_1=O$
となる.

これより $A^n=\lambda_1{}^nP_1+\lambda_2{}^nP_2$ を得る.

$$P_1=\frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix},\quad P_2=\frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} p & -q \\ -p & q \end{pmatrix}$$

よって

$$A^n=\frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix}+(1-p-q)^n\frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} p & -q \\ -p & q \end{pmatrix}$$

$n\to\infty$ のとき $(1-p-q)^n\longrightarrow 0$ なので

$n\to\infty$ のとき　$A^n\longrightarrow\dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix}$

よって, $n\to\infty$ のとき

$$x_n\longrightarrow\frac{q}{p+q}(x_0+y_0)=\frac{b}{a+b}(x_0+y_0)$$

$$y_n\longrightarrow\frac{p}{p+q}(x_0+y_0)=\frac{a}{a+b}(x_0+y_0)$$

となり, 都市部は全人口の $\dfrac{b}{a+b}$ 倍, 農村部は全人口の $\dfrac{a}{a+b}$ 倍に落ち着くことがわかります.

なお答えを出すだけならば, 行列の n 乗を計算しないで次のようにするのがよいと思います.

$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ で, $n\to\infty$ のとき

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \end{pmatrix}$ とする.

上の式で $n\to\infty$ として　$\begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \end{pmatrix}$

$\therefore\ (A-E)\begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore\ \begin{pmatrix} -p & q \\ p & -q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore\ px_\infty=qy_\infty$　　$\therefore\ x_\infty:y_\infty=q:p=b:a$

これから都市部は全人口の $\dfrac{b}{a+b}$ 倍に, 農村部は全人口の $\dfrac{a}{a+b}$ 倍に落ち着くことがわかります.

6. 行列の n 乗の応用──マーケットシェアの問題

人口の流れの問題以外にも行列の n 乗に関する面白い話としてマーケットシェアの問題があります. 自動車メーカーの自動車のマーケットシェア（市場に占める割合）はどうなっていくのだろうかという話です.

問題 3　T社とN社が車を生産している. T社の車の持ち主は車を買い換えるとき, 9割の人がまたT社の車を買い, 残りの1割の人がN社の車に乗りかえるものとします. 逆にN社の車の持ち主は車を買い換えるとき, 7割の人がまたN社の車を買い, 残りの3割の人がT社の車に乗りかえるとします. 車の買い換えは5年に1度いっせいに行われるものとし, 5年ごとに1期, 2期, ……というふうにモデル化して考えます. このときT社とN社のマーケットシェアはどのように変化していくのでしょうか.

$$\mathrm{T}\begin{array}{l} \overset{0.9}{\nearrow}\ \mathrm{T} \\ \underset{0.1}{\searrow}\ \mathrm{N} \end{array}\qquad \mathrm{N}\begin{array}{l} \overset{0.3}{\nearrow}\ \mathrm{T} \\ \underset{0.7}{\searrow}\ \mathrm{N} \end{array}$$

n 期目のT社の占める割合を x_n, N社の占める割合を y_n とすると

$$x_1=0.9x_0+0.3y_0,\qquad y_1=0.1x_0+0.7y_0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}}_{A\text{とおく}}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

となり, 問題1に帰着されることがわかります. T社の占める割合は75％, N社の占める割合は25％に近づいていくことになります. この割合を均衡シェアといいます.

このように, ユーザーがブランドを変える確率を用いて, 将来のブランドのマーケットシェアを予測する方法をマルコフチェーンとよんでいます.

7. おわりに

日頃数学を教えていてつくづく思うのは, どうしたら生き生きとした, 生徒が印象に残る授業を展開できるかということです. 教師が教材をたくさん持っていることがまず必要です. この数研通信に, 生徒の喜びや感動がじかに伝わってくるような報告が数多く紹介されることを期待しています.

〈参考文献〉

1. 黒田俊郎「行列のえほん」三省堂
2. 何森仁, 小沢健一, 近藤年示, 時永晃「生き生き数学」三省堂
3. 川久保勝夫「やさしい行列とベクトル」日本実業出版社

（浅野学園）