数学の学力向上に関する一考察

すずき　よりひさ
鈴木　順久

あらまし　従来のテスト問題の中には，意図的に［考えさせる］問題を入れなかったために生徒の能力が活かされず，発見的喜びを知らない，いわゆる教科書型の問題が多かった．そこで筆者は上記の様な欠点を補うため，いろいろな場面を通して［考えさせる問題］あるいは解法が何通りも可能な問題を，テスト問題の一部に導入した結果，いろいろと興味ある解法が見つかった．

キーワード　数学勉強法／別解／教育工学的手法／戦略的知識（キーワード）／やる気／設問研究／復習

[1]　はじめに

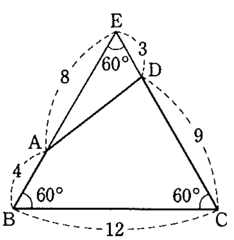
生徒の数学の力をつけるには，何が最善の方法なのかをつねに追究していた．しかし，［考えさせる問題］，あるいは［自分で考える］ことに重点を置いて以来，答案に変化が出て来て，人間の能力のすばらしさに再発見をしたものであった．

[2]　例１として幾何の問題を取り上げた．

> 四辺形 ABCD において AB=4，BC=12，CD=9，∠B=∠C=60° であるとき，この面積を求めよ．

［解１］

$$\text{▱}ABCD=\triangle EBC-\triangle EAD$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 12\cdot\sin 60^\circ-\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3\cdot\sin 60^\circ$$
$$=36\sqrt{3}-6\sqrt{3}$$
$$=30\sqrt{3}$$



［キーワード］　正三角形を作り，全体の面積から，△AED の面積を引く．$S=\frac{1}{2}ab\sin C$ を使用．

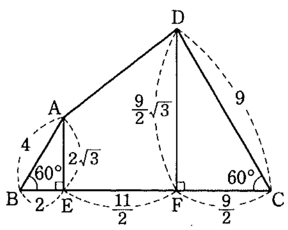
［解２］

$\triangle ABE$ ……　$S_1=\frac{2\times 2\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$\triangle DCF$ ……　$S_2=\frac{\frac{9}{2}\times\frac{9}{2}\sqrt{3}}{2}=\frac{81}{8}\sqrt{3}$

▱AEFD ……　$S_3=\left(2\sqrt{3}+\frac{9}{2}\sqrt{3}\right)\times\frac{11}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{143}{8}\sqrt{3}$

$$S_1+S_2+S_3=30\sqrt{3}$$



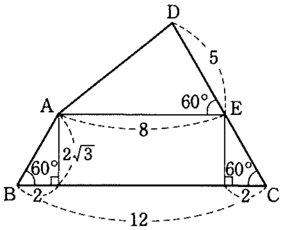
［キーワード］　直角三角形を作り，補助線を BC に垂直に引く．三角形の面積の公式と台形の面積の公式を使用．

［解３］

$$\text{▱}ABCE=\frac{(8+12)\times 2\sqrt{3}}{2}=20\sqrt{3}$$

$$\triangle AED=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot\sin 60^\circ=10\sqrt{3}$$

よって　$30\sqrt{3}$



［キーワード］ BC に平行に補助線を引く．台形と三角形の面積を求める公式使用．

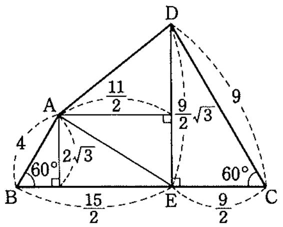
［解 4］

△DEC …… $S_1=\frac{9}{2}\sqrt{3}\times\frac{9}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{81}{8}\sqrt{3}$

△ABE …… $S_2=\frac{15}{2}\times2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{15}{2}\sqrt{3}$

△AED …… $S_3=\frac{9}{2}\sqrt{3}\times\frac{11}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{99}{8}\sqrt{3}$

$S_1+S_2+S_3=30\sqrt{3}$



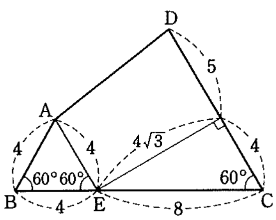
［キーワード］ 多角形をすべて三角形に分割する．解 2 と考え方は似ている．三角形の面積の公式を使用．

［解 5］

△ABE …… $S_1=\frac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot\sin60^\circ=4\sqrt{3}$

▱AECD …… $S_2=\frac{(4+9)\times4\sqrt{3}}{2}=26\sqrt{3}$

$S_1+S_2=30\sqrt{3}$



［キーワード］ 正三角形を作る．点Eから CD に垂線を下ろす．三角形と台形の面積の公式使用．

［解 6］

□EBCF …… $S=12\times\frac{9}{2}\sqrt{3}=54\sqrt{3}$

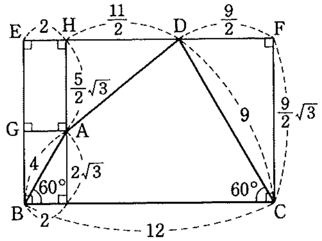
△HAD …… $S_1=\frac{11}{2}\times\frac{5}{2}\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{55}{8}\sqrt{3}$

△DCF …… $S_2=\frac{9}{2}\times\frac{9}{2}\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{81}{8}\sqrt{3}$

△GBA …… $S_3=2\sqrt{3}\times2\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$

□EGAH …… $S_4=2\times\frac{5}{2}\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

よって　$S-(S_1+S_2+S_3+S_4)=30\sqrt{3}$



［キーワード］ 全体（長方形）を作り，残りの部分を引く．三角形と長方形の面積の公式を使用．

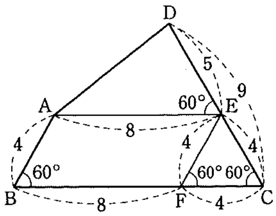
［解 7］

▱ABFE …… $S_1=4\cdot8\cdot\sin60^\circ=16\sqrt{3}$

△AED …… $S_2=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\sin60^\circ=10\sqrt{3}$

△EFC …… $S_3=\frac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot\sin60^\circ=4\sqrt{3}$

$S_1+S_2+S_3=30\sqrt{3}$



［キーワード］ 辺に平行に補助線を引いて平行四辺形を作る．平行四辺形の面積（$ab\sin\theta$）と三角形の面積の公式を使用．

［解 8］

△DEC …… $S_1=\frac{1}{2}\cdot9\cdot9\cdot\sin60^\circ$

$=\frac{81}{4}\sqrt{3}$

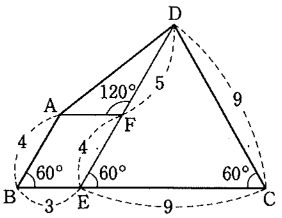
△AFD …… $S_2=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin120^\circ$

$=\frac{15}{4}\sqrt{3}$

▱ABEF …… $S_3=4\cdot3\cdot\sin60^\circ$

$=6\sqrt{3}$

$S_1+S_2+S_3=30\sqrt{3}$



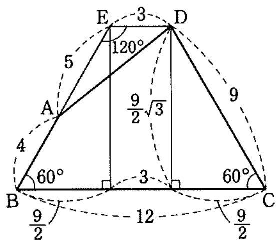
［キーワード］ 点Dから線分 AB に平行に補助線を引いて，三角形，平行四辺形を作る．平行四辺形と三角形の面積の公式を使用．

［解 9］

$$\text{▱EBCD} \cdots\cdots S_1=\frac{(3+12)\times\frac{9}{2}\sqrt{3}}{2}=\frac{135}{4}\sqrt{3}$$

$$\triangle\text{EAD} \cdots\cdots S_2=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot \sin 120^\circ=\frac{15}{4}\sqrt{3}$$

$$S_1-S_2=30\sqrt{3}$$



［キーワード］ 等脚台形を作り，残りの部分を引く．台形と三角形の面積の公式を使用．

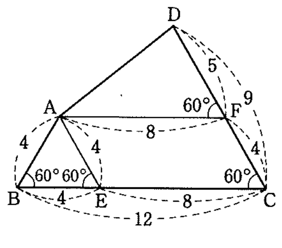
［解 10］

$$\triangle\text{ABE} \cdots\cdots S_1=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot \sin 60^\circ=4\sqrt{3}$$

$$\triangle\text{AFD} \cdots\cdots S_2=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot \sin 60^\circ=10\sqrt{3}$$

$$\text{▱AECF} \cdots\cdots S_3=4\cdot 8\cdot \sin 60^\circ=16\sqrt{3}$$

$$S_1+S_2+S_3=30\sqrt{3}$$



［キーワード］ 点Aから辺 DC に平行に補助線を引く．また点Aから平行四辺形を作るために辺 BC に平行に補助線 AF を作る．三角形と平行四辺形の面積の公式を使用．

［解 11］

△ABD

直線 BD の方程式

$$3\sqrt{3}\,x-5y=0 \cdots\cdots ①$$

Aから ① に下ろした垂線の長さは

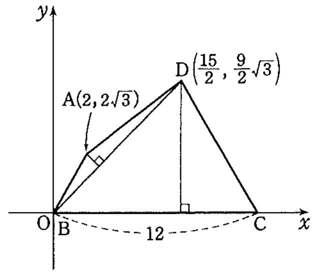
$$\text{高さ}=\frac{|3\sqrt{3}\times 2-5\times 2\sqrt{3}|}{\sqrt{(3\sqrt{3})^2+5^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$$\text{BD}=\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2+\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2}=3\sqrt{13}$$

$$\triangle\text{ABD} \cdots\cdots S_1=3\sqrt{13}\times\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\times\frac{1}{2}=3\sqrt{3}$$

$$\triangle\text{BDC} \cdots\cdots S_2=12\times\frac{9}{2}\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=27\sqrt{3}$$

$$S_1+S_2=30\sqrt{3}$$



［キーワード］ 座標を導入して，解析幾何の問題としてとらえた．ヘッセの公式利用．

［解 12］

$$\triangle\text{ABF} \cdots\cdots S_1=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot \sin 60^\circ=4\sqrt{3}$$

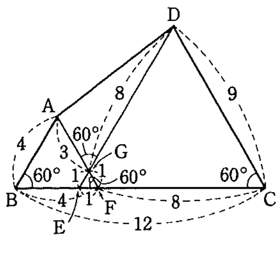
$$\triangle\text{DEC} \cdots\cdots S_2=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 9\cdot \sin 60^\circ=\frac{81}{4}\sqrt{3}$$

$$\triangle\text{AGD} \cdots\cdots S_3=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 8\cdot \sin 60^\circ=6\sqrt{3}$$

$$\triangle\text{GEF} \cdots\cdots S_4=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_1+S_2+S_3-S_4=30\sqrt{3}$$

$$(\angle\text{GEF}=\angle\text{GFE}=\angle\text{FGE}=60^\circ)$$



［キーワード］ 2点 A, D から各辺に平行に補助線を引き，正三角形を作り，すべて三角形に分割する．三角形の面積の公式を使用．

12 通りの解法は，大部分生徒が見つけたものであり，それを私がまとめたものである．正弦定理，余

弦定理を学習した後に，この問題を出題したので，成績の良い生徒の中に，それらの定理を使って解こうとしたため解くことができなかった者がいた．また逆に，普段成績の良くない生徒の中に多数正解を見つけ出した者がいた．よって一概に，点数で生徒をきめつけたりすることは危険であり，方法によっては，能力・才能を伸ばすことが出来ると確信した次第である．

[3]　例２として対数の問題を取り上げた．

> 次の数の大小を調べて，小さい順に左から並べよ．
>
> $\log_2 3,\quad \log_4 7,\quad \log_8 28$

[解１]

底を２にそろえる．

$$\log_4 7=\frac{\log_2 7}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2 7=\log_2\sqrt{7}$$

$$\log_8 28=\frac{\log_2 28}{\log_2 8}=\frac{1}{3}\log_2 28=\log_2\sqrt[3]{28}$$

$$9>7\to 3>\sqrt{7}\to \log_2 3>\log_2\sqrt{7}$$

$$\to \log_2 3>\log_4 7\ \cdots\cdots\ ①$$

$$28>27\to \sqrt[3]{28}>3\to \log_2\sqrt[3]{28}>\log_2 3$$

$$\to \log_8 28>\log_2 3\ \cdots\cdots\ ②$$

①，②により　　$\log_4 7<\log_2 3<\log_8 28$

[キーワード]　底を２にそろえ，真数の大小関係にもちこむ．（２つの数を比較している）

[解２]

解１より

$$\log_2 3,\ \log_4 7=\log_2 7^{\frac{1}{2}},\ \log_8 28=\log_2 28^{\frac{1}{3}}$$

2, 3 の最小公倍数６より，真数を６乗すると

$$3^6=729,\ (7^{\frac{1}{2}})^6=7^3=343,\ (28^{\frac{1}{3}})^6=28^2=784$$

$$784>729>343\to 28^{\frac{1}{3}}>3>7^{\frac{1}{2}}$$

$$\to \log_2 28^{\frac{1}{3}}>\log_2 3>\log_2 7^{\frac{1}{2}}$$

$$\downarrow$$

$$\log_8 28>\log_2 3>\log_4 7$$

[キーワード]　底をそろえ，真数を何乗かして，整数にして同時に比較する．

[解３]

$$\log_2 3-\log_4 7=\log_2 3-\frac{1}{2}\log_2 7=\frac{1}{2}(2\log_2 3-\log_2 7)$$

$$=\frac{1}{2}(\log_2 9-\log_2 7)>0$$

よって　$\log_2 3>\log_4 7\ \cdots\cdots\ ①$

$$\left(\text{あるいは}\quad \log_2\frac{9}{7}>0,\ \frac{9}{7}>1\right)$$

$$\log_8 28-\log_2 3=\frac{1}{3}\log_2 28-\log_2 3$$

$$=\frac{1}{3}(\log_2 28-3\log_2 3)$$

$$=\frac{1}{3}(\log_2 28-\log_2 27)>0$$

よって　$\log_8 28>\log_2 3\ \cdots\cdots\ ②$

$$\left(\text{あるいは}\quad \log_2\frac{28}{27}>0,\ \frac{28}{27}>1\right)$$

①，②により　　$\log_4 7<\log_2 3<\log_8 28$

[キーワード]　大小比較は差をとって，正（あるいは負）になることをいえばよい．

[解４]

$$\log_2 3=\frac{2\log_2 3}{2}=\frac{\log_2 9}{2}\ \cdots\cdots\ ①$$

$$\log_4 7=\frac{\log_2 7}{2}\ \cdots\cdots\ ②$$

$$\log_2 3=\frac{3\log_2 3}{3}=\frac{\log_2 27}{3}\ \cdots\cdots\ ③$$

$$\log_8 28=\frac{\log_2 28}{3}\ \cdots\cdots\ ④$$

①，②により　$\log_2 3>\log_4 7\ \cdots\cdots\ ⑤$

③，④により　$\log_8 28>\log_2 3\ \cdots\cdots\ ⑥$

⑤，⑥により　　$\log_4 7<\log_2 3<\log_8 28$

[キーワード]　底をそろえ，真数の大小関係にもちこむ．２つの数の比較をしている．

[解５]

$$\log_2 3=\log_2\sqrt{9}>\log_2\sqrt{7}$$

$$\left(\because\ \sqrt{9}>\sqrt{7},\ \log_4 7=\frac{1}{2}\log_2 7=\log_2\sqrt{7}\right)$$

$\cdots\cdots\ ①$

$$\log_2 3=\log_2\sqrt[3]{27}<\log_2\sqrt[3]{28}$$

$$\left(\because\ \sqrt[3]{27}<\sqrt[3]{28},\ \log_8 28=\frac{1}{3}\log_2 28=\log_2\sqrt[3]{28}\right)$$

$\cdots\cdots\ ②$

①，②により　　$\log_4 7<\log_2 3<\log_8 28$

[キーワード]　真数の大小関数にもちこみ，比較する数を $\sqrt{}$，$\sqrt[3]{}$ としている．

[解６]

底を８にそろえると

$$\log_2 3=\frac{\log_8 3}{\log_8 2}=3\log_8 3=\log_8 3^3=\log_8 27\ \cdots\cdots\ ①$$

$\log_4 7=\dfrac{\log_8 7}{\log_8 4}=\dfrac{3}{2}\log_8 7=\log_8 7^{\frac{3}{2}}=\log_8 7\sqrt{7}$

$=\log_8\sqrt{343}$ …… ②

$\log_8 28$ ………… ③

①, ③ により $28>27 \longrightarrow \log_8 28>\log_8 27$

$\therefore\ \log_8 28>\log_2 3$ …… ①

①, ② により

$729>343 \longrightarrow 27>\sqrt{343} \longrightarrow \log_8 27>\log_8\sqrt{343}$

$\therefore\ \log_2 3>\log_4 7$ …… ②′

①′, ②′ により　$\log_4 7<\log_2 3<\log_8 28$

[キーワード] 底を 8 にそろえて，真数の大小関係にもちこむ．

[解 7]

解 4 と考え方は同じ．

$\log_2 3=\dfrac{6\log_2 3}{6}=\dfrac{\log_2 729}{6}$ …… ①

$\log_4 7=\dfrac{\log_2 7}{2}=\dfrac{3\log_2 7}{6}=\dfrac{\log_2 343}{6}$ …… ②

$\log_8 28=\dfrac{\log_2 28}{3}=\dfrac{2\log_2 28}{6}=\dfrac{\log_2 784}{6}$ …… ③

①, ②, ③ により

$784>729>343$

$\downarrow$

$\log_2 784>\log_2 729>\log_2 343$

$\downarrow$

$\log_8 28>\log_2 3>\log_4 7$

[キーワード] 解 4 と異なる点は，3 つの数を，同時に比較している．考え方は同じで，底をそろえ，真数の大小関係にもちこむ．

[解 8]

底を 4 にそろえる．

$\log_2 3=\dfrac{\log_4 3}{\log_4 2}=2\log_4 3=\log_4 9$ … ①，$\log_4 7$ … ②

$\log_8 28=\dfrac{\log_4 28}{\log_4 8}=\dfrac{2}{3}\log_4 28=\log_4 28^{\frac{2}{3}}$ … ③

①, ② により　$9>7$

$\log_4 9>\log_4 7 \longrightarrow \log_2 3>\log_4 7$

①, ③ により　$9^3=729<(28^{\frac{2}{3}})^3=784$

$9<28^{\frac{2}{3}} \longrightarrow \log_2 3<\log_8 28$

[キーワード] 底を 4 にそろえる．

[解 9]

$\dfrac{\log_2 3}{\log_4 7}=\dfrac{\log_2 3}{\frac{1}{2}\log_2 7}=\dfrac{\log_2 9}{\log_2 7}=\log_7 9>1,$

$\dfrac{\log_8 28}{\log_2 3}=\dfrac{\frac{1}{3}\log_2 28}{\log_2 3}=\dfrac{\log_2 28}{\log_2 27}=\log_{27}28>1$

よって　$\log_2 3>\log_4 7,\ \log_8 28>\log_2 3,$

$\log_4 7<\log_2 3<\log_8 28$

[キーワード] 比をとり，それが 1 より大か小で大小比較することができる．

9 通りの解法の中，底をそろえることが重要であることが理解できる．生徒の答案の中では，論理的に書いていないために誤答とされた答案が，少しあった．

[4] 戦略的知識 [キーワード] について

問題を解くには，[数学的知識] としての用語・公式等や，問題に対する理解・把握・分析・表現力などの [戦略的知識] が重要と考えられる．それらを [キーワード] としてとらえ，今後良問を通して，単独ではなく問題と一体となって始めて [キーワード] の意義をもち，その積み重ねが大切と考えられ，それをまた何らかの形でフィードバックさせて生徒の学力向上につなげたい．

[5] 教育工学的手法について

説明法による忘却度の違い

説明の方法	記憶保持率	
	3 時間後	3 日後
話をしただけの場合	70 %	10 %
見せただけの場合	72 %	20 %
見せながら話した場合	85 %	65 %

(上の表は，教育機器活用の実際と展望（学研）による)

上の表から，生徒の側からすると目と耳の両方を使用すると，情報の効率は，約 10 倍も大きくなる．教師側からすれば，それらを結ぶものは [指示棒] を使うだけでよい．ただ使い方が大切で，学会の論文によると，指示棒の先でその要点を囲むようにゆっくりと 2 回ほど丸を描いてから，その下部で止めるようにすると，最も良く記憶されることがわかってきた．また指示棒による効果は，(1) 図形を印象づけ記憶させる効果，(2) 多くの情報の中から適切な情報を選出する効果，(3) 問題の説明する過程を理解する効果　の 3 つあると考えられている．授業をするときにそのような [気配り] が大切と考え，学力向上の

1つと考えられる．
指示棒による記憶率は99％．

[6] やる気の理由について

(1) 目的・目標を見つけ，それに向けて自分でやる気を出す状態．
(2) 気分がよく，周りの環境がよくて，友達につられてやる気を出す状態．
(3) 他人に負けたくない，ばかにされたくないといったやる気の状態．
(4) わからなかったものが理解，納得できたときのやる気の状態．
(5) 新学期や入学時における憧れや夢，希望によって起こるやる気の状態．
(6) 自分の立場を理解してやる気になる状態．
(7) 目的・目標（宿題・レポート等）を与えてやる気の出る状態．
(8) 周りを見たり，周りを考えて出たやる気の状態．
(9) 強制的にむりやりにさせられたときに出るやる気の状態．
(10) やらないといけないという危機感，不安感を感じたときに出るやる気の状態．

（電子情報通信学会 ET 88-5，大阪電気通信大学のやる気の調査とその処理を参考）

このように，やる気の理由を教師側が把握しておくことは，教育活動に，もちろん学力向上の1つとして利用・応用することができる．特に，学習意欲を減退させる要因は，授業がわからないことと深く関係しており，上の(4)と比較するとなお一層明確である．

[7] 別解について

問題に対する解がわかったとき，必ず生徒に別解を考えなさいという．それは別解を考えることによって，考え方に幅が出，また，バラバラの知識を記憶するのに比べて，全体的にまとまりがあるので記憶しやすいからである．別解も探すと必ず最低1つぐらいは見つかり，心にゆとりが出てくる．実際採点をすると，すばらしい別解がいくつも見つかり，それを放置しておかず，何らかの形でまとめて，生徒に還元し，後輩のためにも役に立つ形で残しておきたい．

[8] 設問の研究について

1つの問題
→ 解法 → 設問の変化(1) → 解法(1)
→ 解法 → 設問の変化(2) → 解法(2)
⋮
→ 解法 → 設問の変化(n) → 解法(n)

上の表のように，1つの問題に対して深く考えたり，解法を研究していくことは，学力向上の面からもぜひ必要と思われる．例1の幾何の問題に関して設問を考えてみると

① ∠B，∠C の一方あるいは両方の角度を変えた問題．
② 四角形を多角形や空間等に変えた問題．
③ AB，BC，CD の長さを一部あるいは全部変えた問題．
④ 上記①～③のいくつかを組み合わせた問題．

[9] 数学勉強法について

どんな問題でも，自分で考えて解くことの大切さを強調し，また限られた時間の中で，たくさんの問題を解くことは，それ自体不可能に近い．そこで，少数の精選された良問を，別解を考えたり，設問の探究等を徹底的に研究することは，大変重要と考えられる．また計算力をつけさせるために，プリントに練習させたり，またそのプリントの中で工夫，例えば[虫喰い型]の問題にすると，解法のプロセスを理解させるうえで，有効な教材と考えられ，これは教育工学的方法によっても実証され，学力向上の面からも有効な方法と思われる．

〈参考文献〉

① 教育工学関連協会連合第2回全国大会講演論文集（東京工大）
② 電子情報通信学会 ET 88-9
③ 日本数学教育学会全国大会　ポスターセッション　図形の論証指導について
④ 電子情報通信学会 ET 88-5

（福島県立安積女子高等学校）