放物線 $y=x^2$ の極・極線

おか　たかひこ
岡　多賀彦

1．はじめに

「接点・接線」「焦点・準線」はよく知られているが，その一般化である「極・極線」はあまり知られていない．ここでは，最も簡単な2次曲線である放物線 $y=x^2$ の「極・極線」を調べる．

2．極・極線とは何か

a．放物線 $y=x^2$ の外部の点 $P(p,\ q)$ からこの放物線に2本の接線を引き，2つの接点を $A(\alpha,\ \alpha^2)$, $B(\beta,\ \beta^2)$ とする．ここで，放物線の外部とは放物線を境にして焦点のない側をさす．

接線の傾きを m とすると，接点の x 座標は x に関する2次方程式

$$x^2=m(x-p)+q \tag{1}$$

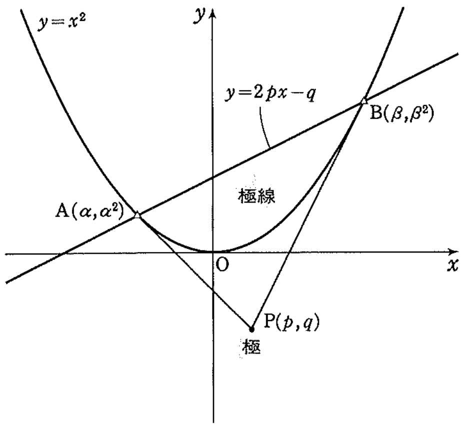
の重解で与えられる．ただし，m は判別式

$$D_x=m^2-4(mp-q)=0 \tag{2}$$

を満している．

点Pが放物線の外部にある $(p^2>q)$ ので，m に関する2次方程式(2)は異なる2つの実数解 m_α, m_β を持ち，それらが2本の接線の傾きを与える．ここで，

$$m_\alpha+m_\beta=4p, \qquad m_\alpha m_\beta=4q \tag{3}$$



それらに対応して，(1)は2種類の重解 α, β を持つ．(3)と，接線の傾きと接点の x 座標の関係

$$m_\alpha=2\alpha, \qquad m_\beta=2\beta$$

から

$$\alpha+\beta=2p, \qquad \alpha\beta=q \tag{4}$$

(4)と，2点 A, B を結ぶ直線の方程式

$$y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta \tag{5}$$

から，求める直線の方程式は

$$y=2px-q \tag{6}$$

となる．

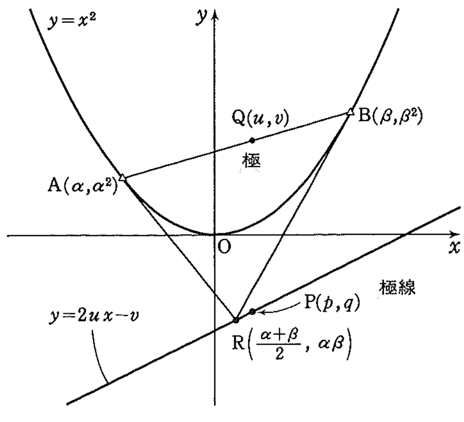
放物線 $y=x^2$ について，点 $(p,\ q)$ を極，直線 $y=2px-q$ をそれに対応する極線という．

b．極線(6)の上の点 $Q(u,\ v)$ に対応する極線をさがす．

点Qを通る任意の直線と放物線 $y=x^2$ との2つの交点を改めて $A(\alpha,\ \alpha^2)$, $B(\beta,\ \beta^2)$ とする．

点Qは直線 AB の上にあるので，(5)から

$$v=(\alpha+\beta)u-\alpha\beta \tag{7}$$



2点 A, B で引いた接線の交点をRとすると

$$R=\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right) \tag{8}$$

で，(7)から点Rの軌跡は直線

$$y=2ux-v \tag{9}$$

となる．放物線 $y=x^2$ の内部に点 $(u,\ v)$ がある場合にも，これを極，直線 $y=2ux-v$ をそれに対応する極線という．

ところで，点Qが直線(6)の上にあるので

$$v=2pu-q \tag{10}$$

(9)(10)から v を消去し，整理すると

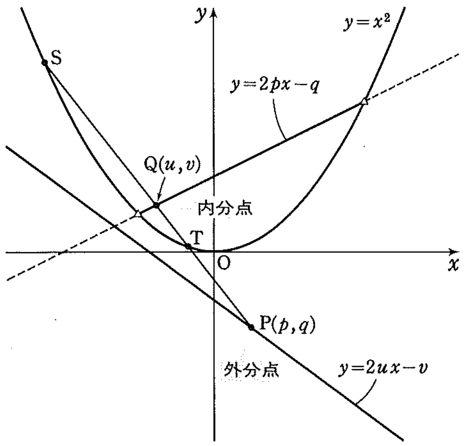
$$y=2u(x-p)+q \tag{11}$$

極Pに対応する極線(6)の上にある点Qを改めて極とすると，その極線(9)は元の極Pを通る．

c．極・極線は本来次のものをいう．放物線 $y=x^2$ と直線とが異なる2点 S, T で交わっていて，その直線の上にある別の2点 $\mathrm{P}(p,\ q)$，$\mathrm{Q}(u,\ v)$ が線分 ST を等しい比に外分・内分している．このとき

$$2pu=q+v \tag{12}$$

の関係があり，外分点・内分点のうちの固定した片方の点が極，直線の傾きを色々と変えたときの他方の点の軌跡が極線である．



3．接点・接線，焦点・準線

接点・接線，焦点・準線は極・極線の特別な場合である．

a．点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$ における接線の方程式は

$$y=2\alpha x-\alpha^2 \tag{13}$$

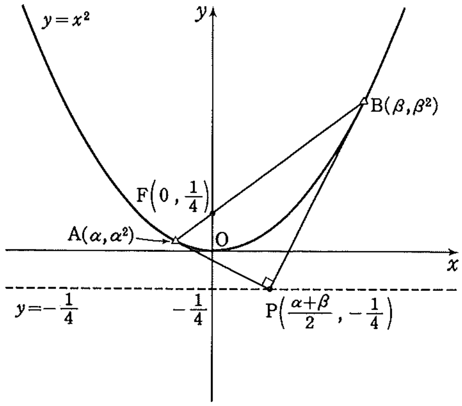
であるが，接点 $(\alpha,\ \alpha^2)$ が極，接線(13)がそれに対応する極線になっている．

b．放物線 $y=x^2$ において，焦点Fの座標は $\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$，準線の方程式は $y=-\dfrac{1}{4}$ であるが，焦点Fが極，準線がそれに対応する極線になっている．

ちなみに，準線 $y=-\dfrac{1}{4}$ の上にある点Pから放物線 $y=x^2$ に引いた2本の接線は，(3)と $q=-\dfrac{1}{4}$ とから

$$m_\alpha m_\beta=-1$$

となって，互いに直交する．



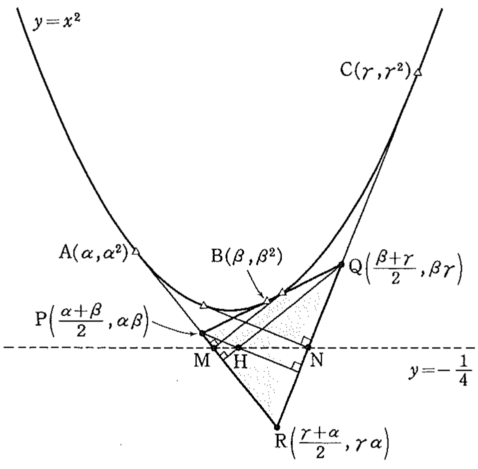
4．放物線の上の異なる3点で引かれた接線がつくる三角形

放物線 $y=x^2$ の上の異なる3点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$, $\mathrm{C}(\gamma,\ \gamma^2)$ で引いた3本の接線が交わってできる，3つの交点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{\beta+\gamma}{2},\ \beta\gamma\right)$，$\mathrm{R}\left(\dfrac{\gamma+\alpha}{2}, \gamma\alpha\right)$ がつくる三角形を考える．

a．△PQR について，その垂心Hの座標は

$$\left(2\alpha\beta\gamma+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2},\ -\frac{1}{4}\right) \tag{14}$$

なので，垂心Hは放物線 $y=x^2$ の準線 $y=-\dfrac{1}{4}$ の上にある．



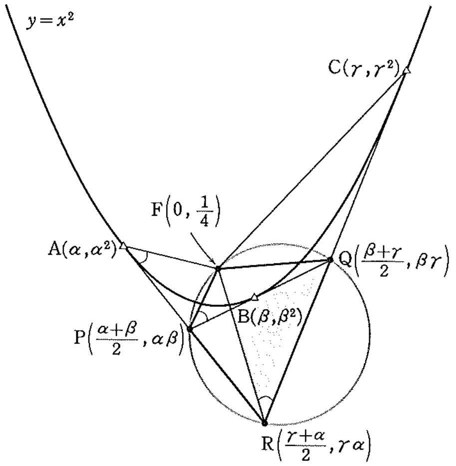
ちなみに，準線と線分 AR, CR の交点を M, N とすると，PがM，またはQがN，に一致するとき，準線の上の点から放物線に引いた２本の接線は直交するので，三角形は直角三角形で，M, N が垂心Hに一致する．

b．△PQR について，その外接円の方程式は

$$x^2+y^2+\left(2\alpha\beta\gamma-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)x-\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\frac{1}{4}\right)y+\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{4}=0 \tag{15}$$

である．

焦点Fの座標 $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$ は (15) を満たすので，外接円は放物線 $y=x^2$ の焦点を通る．



ちなみに，放物線 $y=x^2$ について，その上の点Aで引いた接線の上の点Pから放物線に引いた接線と線分 PF のなす角は，点Aでの接線と線分 AF のなす角に等しい．ただし，２点 A, P はその範囲で任意である．

これから

$$\angle\mathrm{FPB}=\angle\mathrm{FRC}=\angle\mathrm{FAP}$$

となるので，４点 F, P, Q, R は同一円周上にある．

5．自己極線三角形

放物線 $y=x^2$ の上に異なる４点 $P(p,\ p^2)$, $Q(q,\ q^2)$, $R(r,\ r^2)$, $S(s,\ s^2)$ をとる．

２直線 PQ, RS の交点Lの座標は

$$\left(\frac{pq-rs}{p+q-r-s},\ \frac{pq(r+s)-rs(p+q)}{p+q-r-s}\right)$$

２直線 SP, QR の交点Mの座標は

$$\left(\frac{sp-qr}{s+p-q-r},\ \frac{sp(q+r)-qr(s+p)}{s+p-q-r}\right)$$

これから，２つの交点 L, M を結ぶ直線の方程式は

$$(p+r-q-s)y=2(pr-qs)x-pr(q+s)+qs(p+r) \tag{16}$$

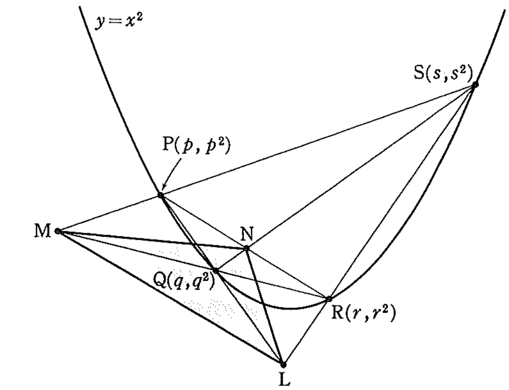
となる．

一方，４点 P, Q, R, S を相互に結ぶ直線の中で残された２本の直線 PR, QS の交点Nの座標は

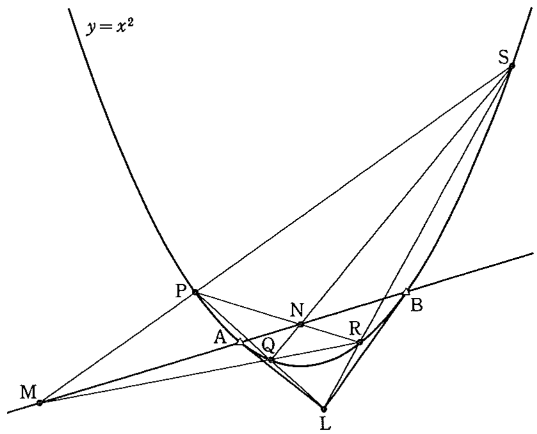
$$\left(\frac{pr-qs}{p+r-q-s},\ \frac{pr(q+s)-qs(p+r)}{p+r-q-s}\right) \tag{17}$$

となる．

(16) (17) から，点Nと直線 LM は放物線 $y=x^2$ の極・極線になっている．他の対についても同様である．



４点 P, Q, R, S を相互に結んだ６本の直線がつくる３つの交点 L, M, N でできる三角形について，３つの頂点 L, M, N とそれらの対辺 MN, NL, LM はそれぞれ極・極線の関係にある．このことから，△LMN を自己極線三角形と呼ぶ．



ところで，この知識を使えば，放物線 $y=x^2$ の外

部の点Lから，あいまいさなしに，２本の接線を引くことができる．

点Lから放物線に異なる２点で交わる直線を２本引き，交点をPとQ，RとSとする．これらの４点を交互に結ぶ直線を引き，交点をM，Nとする．直線MNと放物線との２つの交点をA，Bとすると，これらが点Lから引く２本の接線の接点である．LとA，LとBを結べば正確な接線が引ける．

6．パスカルの定理，ブリアンションの定理

放物線 $y=x^2$ の上に異なる６点 $A(a,\ a^2)$, $A'(\alpha,\ \alpha^2)$, $B(b,\ b^2)$, $B'(\beta,\ \beta^2)$, $C(c,\ c^2)$, $C'(\gamma,\ \gamma^2)$ をとる．

a．２直線 AA′，B′C の交点Pの座標は

$$\left(\frac{a\alpha-\beta c}{a+\alpha-\beta-c},\ \frac{a\alpha(\beta+c)-\beta c(a+\alpha)}{a+\alpha-\beta-c}\right)$$

２直線 A′B，CC′ の交点Qの座標は

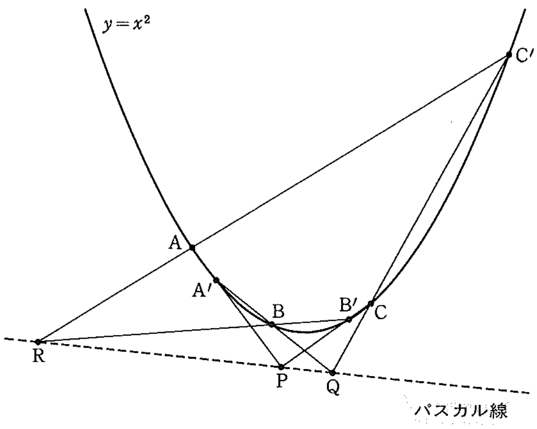
$$\left(\frac{\alpha b-c\gamma}{\alpha+b-c-\gamma},\ \frac{\alpha b(c+\gamma)-c\gamma(\alpha+b)}{\alpha+b-c-\gamma}\right)$$

これから，２つの交点 P，Q を結ぶ直線の方程式は

$$\begin{aligned}&(a\alpha-\alpha b+b\beta-\beta c+c\gamma-\gamma a)y\\&=(ab\beta+bc\gamma+ca\alpha+a\alpha\beta+b\beta\gamma+c\gamma\alpha\\&\quad-ab\gamma-bc\alpha-ca\beta-\alpha\beta\gamma-b\gamma\alpha-c\alpha\beta)x\\&\quad-a\alpha b\beta-b\beta c\gamma-c\gamma a\alpha+\alpha b\beta c+\beta c\gamma a\\&\quad+\gamma a\alpha b\end{aligned}\tag{18}$$

となる．

(18) は，$a,\ \alpha,\ b,\ \beta,\ c,\ \gamma$ のサイクリックな交換に対して不変なので，残りの２本の直線 BB′，C′A の交点Rも直線 (18) の上にある．



したがって，３つの交点 P，Q，R は同一直線上にある．これをパスカルの定理，直線 (18) をパスカル線という．

b．２点 A，A′ での接線の交点Lと２点 B′，C での接線の交点Sを結ぶ直線の方程式は

$$\begin{aligned}(a+\alpha-\beta-c)y=&2(a\alpha-\beta c)x\\&-a\alpha(\beta+c)+\beta c(a+\alpha)\end{aligned}$$

２点 A′，B での接線の交点Mと２点 C，C′ での接線の交点Tを結ぶ直線の方程式は

$$\begin{aligned}(\alpha+b-c-\gamma)y=&2(\alpha b-c\gamma)x\\&-\alpha b(c+\gamma)+c\gamma(\alpha+b)\end{aligned}$$

これから，２本の直線 LS，MT の交点Oの座標は

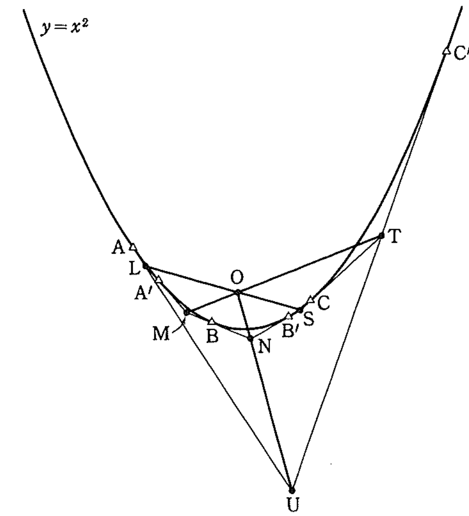
$$\left(\frac{ab\beta+bc\gamma+ca\alpha+a\alpha\beta+b\beta\gamma+c\gamma\alpha-\cdots}{2(a\alpha-\alpha b+b\beta-\beta c+c\gamma-\gamma a)}\right.$$

$$\cdots\frac{-ab\gamma-bc\alpha-ca\beta-\alpha\beta\gamma-b\gamma\alpha-c\alpha\beta}{},$$

$$\left.\frac{a\alpha b\beta+b\beta c\gamma+c\gamma a\alpha-\alpha b\beta c-\beta c\gamma a-\gamma a\alpha b}{a\alpha-\alpha b+b\beta-\beta c+c\gamma-\gamma a}\right)\tag{19}$$

となる．

(19) は，$a,\ \alpha,\ b,\ \beta,\ c,\ \gamma$ のサイクリックな交換に対して不変なので，残りの２点 B，B′ での接線の交点Nと２点 C′，A での接線の交点Uを結ぶ直線もまた点Oを通っている．



したがって，３本の直線 LS，MT，NU は１点Oで交わっている．これをブリアンションの定理という．また，(18)(19) から，点Oと直線 PQR は極・極線の関係にある．

7．惑星が放物線軌道を運動するときの中心力

太陽が点 $Q(u,\ v)$ にあって，ある惑星が放物線 $y=x^2$ の上を運動していると仮定する．

ある時刻に点 $A(\alpha,\ \alpha^2)$ にあったその惑星が，微小時間 Δt の後に，点 $B(\beta,\ \beta^2)$ に移った．

中心力による運動では面積速度 V_s が一定なので，2つの線分 QA，QB と放物線の AB 間とで囲まれた部分の面積は $V_s\cdot\Delta t$ に等しい．いま，微小時間 Δt としているので，これは △QAB の面積

$$\frac{1}{2}|(\beta-\alpha)\{\alpha\beta-(\alpha+\beta)u+v\}| \tag{20}$$

に置き換えることができる．

点Aでの接線と点Bを通り線分 QA に平行な直線との交点をCとすると，線分 BC の長さ

$$\frac{\sqrt{(\alpha-u)^2+(\alpha^2-v)^2}\cdot(\beta-\alpha)^2}{|\alpha^2-2\alpha u+v|} \tag{21}$$

は，微小時間 Δt の間に惑星が太陽に向かって落下する距離で，このときの加速度を a とすると

$\frac{1}{2}a\cdot(\Delta t)^2$ に等しい．

また，惑星が太陽に引かれる力を F，この系の慣算質量を m とすると，ニュートンの運動の第2法則

$$F=ma$$

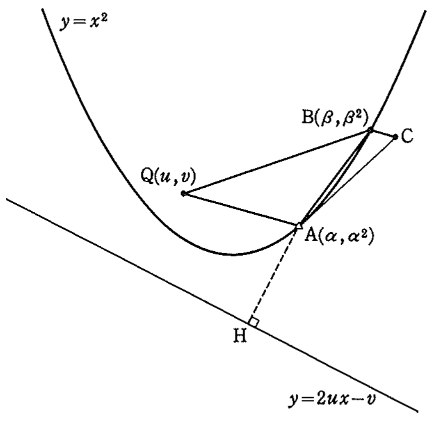
が成り立つ．

(20)(21)から

$$\lim_{\beta\to\alpha}\frac{BC}{(\triangle QAB)^2}=\frac{4\sqrt{(\alpha-u)^2+(\alpha^2-v)^2}}{|\alpha^2-2\alpha u+v|^3}$$

点Qを極とする極線 $y=2ux-v$ に点Aから下した垂線の足をHとすると

$$AH=\frac{|\alpha^2-2u\alpha+v|}{\sqrt{4u^2+1}}$$



したがって，太陽が点Qにあって，惑星が放物線 $y=x^2$ の上を運動するときの力は

$$F=\frac{m}{2V_s^2}\cdot\lim_{\beta\to\alpha}\frac{BC}{(\triangle QAB)^2}$$
$$=\frac{2m}{V_s^2\cdot(4u^2+1)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{QA}{AH^3}$$

から，QA/AH^3 に比例している．

ちなみに，太陽が焦点Fにあるとき，FA＝AH から，この力 F は FA^2 に反比例するので，万有引力に一致する．

8．おわりに

ここでは放物線 $y=x^2$ の極・極線について調べたが，他の2次曲線，楕円，双曲線についても同様な極・極線の関係が存在している．

末尾ながら，城山義光先生（大阪・清風高校）の御教示に感謝する．

〈参　考　文　献〉

[1]　矢野健太郎　平面解析幾何学　裳華房　1969年

[2]　福原満洲雄　射影幾何　実数出版　1985年

[3]　ニュートン　自然哲学の数学的諸原理　中央公論社　1971年

[4]　堀源一郎　太陽系　岩波新書　1976年

（大阪府立大手前高等学校）