円錐曲線について(1)

小室(こむろ)　久二雄(くにお)

はじめに

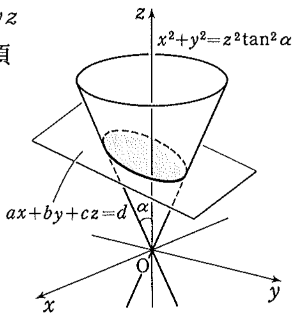
2次曲線が，平面による円錐の切り口としてあらわれることはよく知られており，入試問題の題材にもなっている（61・東大，理科，62・自治医大，63・早稲田大，理工等）．その解法は多くの幾何的内容を含み，余裕のある高校生に対しての授業における適切なトピックと考える．

本稿は，以上の主旨にのっとり上記の内容について筆者が清真学園で授業したものを一般的な場合に書き直したものである．少しでも高校生に対する指導に役立てていただければ幸いである．

第1章　解析幾何学的手法

空間の直交座標系 xyz において，軸が z 軸で頂点が原点である円錐は

$$x^2+y^2=z^2\tan^2\alpha \quad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right) \quad \cdots\cdots ①$$



と表せる．ここで，α は軸と母線のなす角である．本章では円錐①を原点を通らない平面

$$ax+by+cz=d \quad \cdots\cdots ②$$

で切ったときの切り口を解析幾何学的に取り扱う．

まず，全体を z 軸の周りに回転させることにより，

$$\begin{cases} x^2+y^2=(\tan^2\alpha)z^2 \\ b'y+c'z=d' \end{cases}$$

で考えればよいことに注意する．実際

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ b' \end{pmatrix}$$

を満たす β $\left(\text{すなわち } \tan\beta=\frac{a}{b} \text{ を満たす } \beta\right)$ をとり，β だけ z 軸の周りに回転させればよい．← 注意1

さらに，$b'y+c'z=d'$ を $y\cos\theta+z\sin\theta=p$ と変形し，

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2\tan^2\alpha \\ y\cos\theta+z\sin\theta=p \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad \cdots\cdots ③$$

← 注意2

で考える．ところで，③より z を消去した x，y の関係式は，切り口を xy 平面に射影したものでありそのままでは切り口を表す方程式にはならない．そこで，それを避けるために，③を x 軸の周りに $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ 回転し，平面が xy 平面に平行になるようにして議論する．← 注意2

$(x,\ y,\ z)$ を x 軸の周りに $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ 回転したものを $(x',\ y',\ z')$ とすると，

$$x'=x$$

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

より

$$x=x'$$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ x=x',\ y=y'\sin\theta+z'\cos\theta,$$
$$z=-y'\cos\theta+z'\sin\theta \quad \cdots\cdots ④$$

④より円錐 $x^2+y^2=z^2\tan^2\alpha$ を x 軸の周りに $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ 回転すると，

$$x'^2+(y'\sin\theta+z'\cos\theta)^2$$
$$=(-y'\cos\theta+z'\sin\theta)^2\tan^2\alpha$$

$$\therefore\ x^2+(\sin^2\theta-\tan^2\alpha\cos^2\theta)y^2+\sin2\theta(1+\tan^2\alpha)yz$$
$$+(\cos^2\theta-\tan^2\alpha\sin^2\theta)z^2=0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

また，平面 $y\cos\theta+z\sin\theta=p$ を x 軸の周りに $\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ 回転すると

$$z=p \quad \cdots\cdots ⑥$$

であるから，結局 ⑤, ⑥ を解けばよいことがわかる．すなわち，⑤, ⑥ より z を消去した

$$x^2+(\sin^2\theta-\tan^2\alpha\cos^2\theta)y^2+p\sin2\theta(1+\tan^2\alpha)y$$
$$+p^2(\cos^2\theta-\tan^2\alpha\sin^2\theta)=0 \quad \cdots\cdots ⑦$$

が求める曲線の方程式である．⑦ において $\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$ のときは円となるので，ここでは考えない．

ここで，$k=\sin^2\theta-\tan^2\alpha\cos^2\theta$

とおく．このとき，

$$k=\sin^2\theta-\tan^2\alpha\cos^2\theta$$
$$=\cos^2\theta(\tan^2\theta-\tan^2\alpha)$$

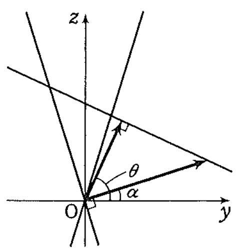
（I）　$k>0$ のとき

$k>0 \iff \tan^2\theta>\tan^2\alpha$

$\iff -\dfrac{\pi}{2}<\theta<-\alpha,$

$\quad \alpha<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$\iff$ 平面が円錐の頂点以外の点ですべての母線と頂点に関して同じ側で交わる．



ところで，$k>0$ のとき ⑦ は

$$x^2+ky^2+p\sin2\theta(1+\tan^2\alpha)y$$
$$+(\cos^2\theta-\tan^2\alpha\sin^2\theta)p^2=0$$

となり楕円である．　← 注意 3

次に $k>0$ のとき，長軸，短軸の長さを計算する．まず次の命題を利用すれば

命題 1　2 次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2ky+c=0$$

は，$ab-h^2\neq0$ のとき

$$ax^2+2hxy+by^2+\frac{\det B}{\det A}=0$$

に平行移動できる．ここで，行列 A, B は

$$A=\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & k \\ g & k & c \end{pmatrix}$$

で定義する．　← 注意 4

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & l \\ 0 & l & m \end{pmatrix}$$

ただし $\begin{cases} l=p\sin\theta\cos\theta(1+\tan^2\alpha) \\ m=(\cos^2\theta-\tan^2\alpha\sin^2\theta)p^2 \\ k=\sin^2\theta-\tan^2\alpha\cos^2\theta \end{cases}$

より

$$\det A=k=\sin^2\theta-\tan^2\alpha\cos^2\theta$$

$$\det B=\det\begin{pmatrix} k & l \\ l & m \end{pmatrix}$$
$$=(\sin^2\theta-\tan^2\alpha\cos^2\theta)(\cos^2\theta-\tan^2\alpha\sin^2\theta)p^2$$
$$-p^2\sin^2\theta\cos^2\theta(1+\tan^2\alpha)^2$$
$$=-p^2\tan^2\alpha$$

であるから，

$$x^2+(\sin^2\theta-\tan^2\alpha\cos^2\theta)y^2$$
$$=\frac{p^2\tan^2\alpha}{\sin^2\theta-\tan^2\alpha\cos^2\theta}$$

ゆえに

$$\frac{x^2}{\dfrac{p^2\tan^2\alpha}{\sin^2\theta-\tan^2\alpha\cos^2\theta}}+\frac{y^2}{\dfrac{p^2\tan^2\alpha}{(\sin^2\theta-\tan^2\alpha\cos^2\theta)^2}}=1$$

ここで，

$$\frac{\tan^2\alpha}{\sin^2\theta-\tan^2\alpha\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha(1-\sin^2\theta)}$$
$$=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta-\sin^2\alpha}$$

$$\therefore\ (\text{短軸})=\frac{2p\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\theta-\sin^2\alpha}}$$

また，同様に $\dfrac{\tan\alpha}{\sin^2\theta-\tan^2\alpha\cos^2\theta}=\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\theta-\sin^2\alpha}$

$$\therefore\ (\text{長軸})=\frac{p\sin2\alpha}{\sin^2\theta-\sin^2\alpha}$$

（II）　$k<0$ のとき

$k<0 \iff \tan^2\theta<\tan^2\alpha$

$\iff -\alpha<\theta<\alpha$

$\iff$ 平面が円錐の 2 つの部分と交わる．

このとき，（I）と同様の変形を行うことにより，

$$-\frac{x^2}{\dfrac{p^2\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha\cos^2\theta-\sin^2\theta}}+\frac{y^2}{\dfrac{p^2\tan^2\alpha}{(\sin^2\theta-\tan^2\alpha\cos^2\theta)^2}}=1$$

を得る．さらに

$$\frac{p^2\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{p^2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha-\sin^2\theta}=a^2$$

$$\frac{p\tan\alpha}{\tan^2\alpha\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{p\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\sin^2\theta}=b$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
c^2&=a^2+b^2\\
&=\frac{p^2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha-\sin^2\theta}+\frac{p^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin^2\alpha-\sin^2\theta)^2}\\
&=\frac{p^2\sin^2\alpha(\sin^2\alpha-\sin^2\theta+\cos^2\alpha)}{(\sin^2\alpha-\sin^2\theta)^2}\\
&=\frac{p^2\sin^2\alpha\cos^2\theta}{(\sin^2\alpha-\sin^2\theta)^2}
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ c=\frac{p\sin\alpha\cos\theta}{\sin^2\alpha-\sin^2\theta}$$ ← 注意 5

よって，

$$(\text{頂点間の距離})=2b=\frac{p\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha-\sin^2\theta}$$

$$(\text{焦点間の距離})=2c=\frac{2p\sin\alpha\cos\theta}{\sin^2\alpha-\sin^2\theta}$$

の双曲線である．

(III)　$k=0$ のとき

$$
\begin{aligned}
k=0 &\iff \sin^2\theta-\tan^2\alpha\cos^2\theta=0\\
&\iff \tan\theta=\pm\tan\alpha\\
&\iff \theta=\pm\alpha\\
&\iff \text{平面が円錐の 1 つの母線と平行}
\end{aligned}
$$

このとき，⑦は

$$
\begin{aligned}
&x^2+p\sin 2\theta(1+\tan^2\theta)y\\
&\quad+p^2(\cos^2\theta-\tan^2\theta\sin^2\theta)=0 \qquad \cdots\cdots ⑧
\end{aligned}
$$

となる．ここで，

$$\sin 2\theta(1+\tan^2\theta)=2\tan\theta$$

$$
\begin{aligned}
\cos^2\theta-\tan^2\theta\sin^2\theta&=\frac{1}{\cos^2\theta}(\cos^4\theta-\sin^4\theta)\\
&=\frac{\cos 2\theta}{\cos^2\theta}
\end{aligned}
$$

であるから，⑧は

$$
\begin{aligned}
x^2&=-2py\tan\theta-\frac{p^2\cos 2\theta}{\cos^2\theta}\\
&=4\cdot\left(-\frac{p}{2}\tan\theta\right)(y+p\cot 2\theta)
\end{aligned}
$$

となる．よって

$$(\text{準線と焦点の距離})=p\tan\theta$$

の放物線である．

注意 1　法線ベクトルが $\vec{n}$ の直線のベクトル方程式を

$$(\vec{p}-\vec{p_0})\cdot\vec{n}=0 \qquad \cdots\cdots ⑨$$

とすると，行列 A が直交行列（${}^tAA=E$ すなわち回転または原点を通る直線に関する対称移動を表す行列）のとき，

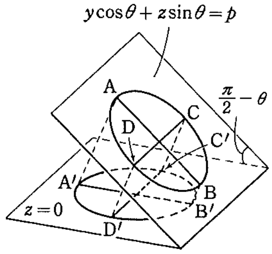
$$
\begin{aligned}
(A\vec{p}-A\vec{p_0})\cdot A\vec{n}&=A(\vec{p}-\vec{p_0})\cdot A\vec{n}\\
&={}^tAA(\vec{p}-\vec{p_0})\cdot\vec{n}=(\vec{p}-\vec{p_0})\cdot\vec{n}=0
\end{aligned}
$$

より，$A\vec{n}$ が直線⑨を A で移した直線の法線ベクトルになる．

注意 2　楕円の場合に限れば，短軸は 2 平面

$$y\cos\theta+z\sin\theta=p$$
$$z=0$$

の交線と平行であるので，右の図で



$$\mathrm{DC}=\mathrm{D'C'}=(\text{斜影した楕円の短軸})$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AB}&=\mathrm{A'B'}\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\
&=\mathrm{A'B'}\operatorname{cosec}\theta\\
&=(\text{斜影した楕円の長軸})\times\operatorname{cosec}\theta
\end{aligned}
$$

が成り立つ．実際③より z を消去すると

$$
\begin{aligned}
&x^2\sin^2\theta+y^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta\tan^2\alpha)\\
&\qquad+2py\cos\theta\tan^2\alpha-p^2\tan^2\alpha=0 \qquad \cdots\cdots ⑩
\end{aligned}
$$

となる．ここで

$$
\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix}\sin^2\theta & 0\\ 0 & \sin^2\theta-\cos^2\theta\tan^2\alpha\end{pmatrix}\\
&\qquad=\sin^2\theta(\sin^2\theta-\cos^2\theta\tan^2\alpha)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix}\sin^2\theta & 0 & 0\\ 0 & \sin^2\theta-\cos^2\theta\tan^2\alpha & p\cos\theta\tan^2\alpha\\ 0 & p\cos\theta\tan^2\alpha & -p^2\tan^2\alpha\end{pmatrix}\\
&\qquad=-p^2\tan^2\alpha\sin^4\theta
\end{aligned}
$$

であるから，命題 1 より⑩は

$$
\begin{aligned}
&x^2\sin^2\theta+y^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta\tan^2\alpha)\\
&\qquad=\frac{p^2\tan^2\alpha\sin^2\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta\tan^2\alpha}
\end{aligned}
$$

に平行移動できる．

$$\therefore\ a^2=\frac{p^2\tan^2\alpha}{\sin^2\theta-\cos^2\theta\tan^2\alpha}=\frac{p^2\sin^2\alpha}{\sin^2\theta-\sin^2\alpha}$$

$$b^2=\frac{p^2\tan^2\alpha\sin^2\theta}{(\sin^2\theta-\cos^2\theta\tan^2\alpha)^2}=\frac{p^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin^2\theta}{(\sin^2\theta-\sin^2\alpha)^2}$$

したがって，本文の内容と比べることにより，上で述べた性質が成り立つ．なお，双曲線や放物線においては，xy 平面に焦点が焦点に移るわけではないのでこの議論は使えない．

注意 3　実際には

$$
\begin{aligned}
&x^2+ky^2+p\sin 2\theta(1+\tan^2\alpha)y\\
&\quad+(\cos^2\theta-\tan^2\alpha\sin^2\theta)p^2=0 \qquad \cdots\cdots ⑪
\end{aligned}
$$

において，$k>0$ であるからといって楕円になるとは

限らない．点だけになることや存在しないこともあり得る．そのようなことが起こらないことを示すには，次の命題を利用すると容易である．

命題 2　2 次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2ky+c=0 \quad \cdots\cdots ⑫$$

について，行列 A, B を

$$A=\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & k \\ g & k & c \end{pmatrix}$$

とおく．ただし $A \neq O$ とする．さらに

$$K_0B=\det\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} a & g \\ g & c \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} b & k \\ k & c \end{pmatrix}$$

によって K_0B を定義する．

このとき，⑫ は次のように分類される．

(I)　$\det A>0$　のとき

　$\mathrm{Tr}A\cdot\det B<0$　ならば楕円

　$\mathrm{Tr}A\cdot\det B=0$　ならば 1 点

　$\mathrm{Tr}A\cdot\det B>0$　ならば条件を満たす点は存在しない．

(II)　$\det A<0$　のとき

　$\det B \neq 0$　ならば双曲線

　$\det B=0$　ならば交わる 2 直線

(III)　$\det A=0$　のとき

　(i)　$\det B \neq 0$　ならば放物線

　(ii)　$\det B=0$　ならば

　　$K_0B<0$　のとき平行な 2 直線

　　$K_0B=0$　のとき 1 直線

　　$K_0B>0$　のとき条件を満たす点は存在しない．

3 行 3 列の行列を用いた証明は標準的な線型代数の教科書（たとえば[1]），2 行 2 列の行列だけを用いた証明は拙著 [2] を参考にしていただきたい．

命題 2 を用いることにより，2 次曲線 ⑪ において，$k>0$ のとき

$$\mathrm{Tr}A\cdot\det B=(1+k)(-p^2\tan^2\alpha)<0$$

であるから楕円である．また双曲線や放物線に関しても同様である．

注意 4　命題 1 の証明は次の通りである．

[命題 1 の証明]　2 次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2ky+c=0$$

を x 軸方向に x_0，y 軸方向に y_0 平行移動して得られる曲線の方程式は，

$$a(x-x_0)^2+2h(x-x_0)(y-y_0)+b(y-y_0)^2$$
$$+2g(x-x_0)+2k(y-y_0)+c=0$$

これを整理して，

$$ax^2+2hxy+by^2-2(ax_0+hy_0-g)x$$
$$-2(hx_0+by_0-k)y$$
$$+ax_0^2+2hx_0y_0+by_0^2-2gx_0-2ky_0+c=0$$

を得る．ここで，x_0, y_0 についての連立方程式

$$\begin{cases} ax_0+hy_0-g=0 \\ hx_0+by_0-k=0 \end{cases} \quad \cdots\cdots ⑬$$

は $ab-h^2 \neq 0$ であるから解

$$x_0=\frac{bg-hk}{ab-h^2},\quad y_0=\frac{-gh+ak}{ab-h^2} \quad \cdots\cdots ⑭$$

を持つ．次に x_0, y_0 が ⑭ を満たすとき

$$l=ax_0^2+2hx_0y_0+by_0^2-2gx_0-2ky_0+c$$

を計算する．

まず ⑬ より

$$x_0(ax_0+hy_0-g)+y_0(hx_0+by_0-k)=0$$

であるから

$$ax_0^2+2hx_0y_0+by_0^2-gx_0-ky_0=0$$

を得る．よって，

$$l=ax_0^2+2hx_0y_0+by_0^2-2gx_0-2ky_0+c$$
$$-(ax_0^2+2hx_0y_0+by_0^2-gx_0-ky_0)$$
$$=-gx_0-ky_0+c$$
$$=-g\cdot\frac{bg-hk}{ab-h^2}-k\cdot\frac{-gh+ak}{ab-h^2}+c$$
$$=\frac{abc+2ghk-bg^2-ak^2-ch^2}{ab-h^2}$$
$$=\frac{\det B}{\det A}$$

[証明終り]

注意 5　2 次曲線の離心率 e について，次が成り立つ．

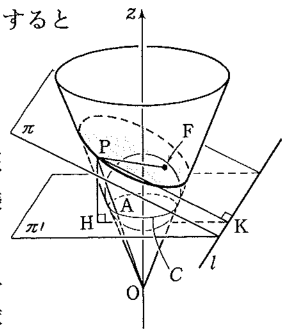
命題 3

円錐 $x^2+y^2=z^2\tan^2\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ と平面

$y\cos\theta+z\sin\theta=p$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ の切り口である 2 次曲線の離心率を e とすると

$$e=\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}$$

が成り立つ．



[証明]　楕円の場合に証明する（他の場合も同様である）．

円錐に内接し，さらに切り口の平面に接する球

を O' とする（このような球は2つあり，ここでは前ページの図のような場合を考えるが，もう一方の球を考えても同様である）.

さらに，球 O' と円錐の交線を C，C を含む平面を π'，2平面 π, π' の交線を l とする.

与えられた2次曲線上の点をPとし，PO（Oは円錐の頂点）と円 C の交点をA，Pから平面 π'，直線 l に下ろした垂線の足をそれぞれH, Kとする．このとき，焦点Fは球 O' と平面 π の接点であるから，

$$\mathrm{PF}=\mathrm{PA}$$

さらに3垂線の定理より

$$\mathrm{HK}\perp l \qquad \therefore\ \angle\mathrm{KPH}=\theta$$

また　PH∥（z軸）より

$$\angle\mathrm{APH}=\angle\mathrm{HPO}=\alpha$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PK}}=\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PK}}=\frac{\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{PK}}}{\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{PA}}}=\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}=(\text{一定})$$

よって，与えられた曲線は，定点Fと定直線 l への距離の比が一定である．したがって，l がこの2次曲線の準線であり，離心率 e については

$$e=\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}$$

が成り立つ.　　　　　　　　　　　　[証明終り]

（焦点間の距離）=（長軸の長さ）×（離心率）

が成り立つので，命題3より

$$c=be=\frac{p\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\sin^2\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}$$

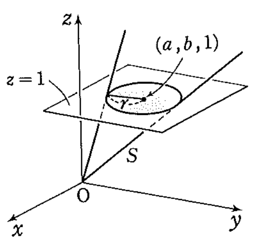
$$=\frac{p\sin\alpha\cos\theta}{\sin^2\alpha-\sin^2\theta}$$

として焦点間の距離を求めてもよい.

次に斜円錐を平面で切ったときの切り口を考える.

頂点が原点で，斜円錐の底の円が xy 平面と平行であるとしても一般性は失われない.

斜円錐 S を平面 $z=1$ で切ったときの切り口が，$(a,\ b,\ 1)$ を中心とする半径 r の円とすると，この斜円錐 S は



$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}r\cos\theta+a\\r\sin\theta+b\\1\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots①$$

と媒介変数表示できる.

斜円錐①は，頂点が原点で，底が平面 $z=1$ 上の $(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径が r の円である直円錐

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\\1\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots②$$

を行列

$$A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}$$

で1次変換したものである．実際

$$\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}t\begin{pmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\\1\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}r\cos\theta+a\\r\sin\theta+b\\1\end{pmatrix}$$

以上の準備のもとで，斜円錐①と平面

$$\alpha:ax+by+cz+d=0\qquad\cdots\cdots③$$

との交線を考える．行列 A の逆変換で①，③を移せば，それぞれ直円錐，平面に移り，さらに平面が円錐の頂点以外の点ですべての母線と交わる，1つの母線と平行，円錐の2つの部分で交わる条件は保たれる．さらに，1次変換によって，楕円，双曲線，放物線はそれぞれ楕円，双曲線，放物線　← 注意に移るので，斜円錐でも直円錐と同様のことが成り立つ.

注意　楕円，双曲線，放物線は1次独立なベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いてそれぞれ

$$\left.\begin{array}{l}\vec{p}=\overrightarrow{p_0}+(\cos\theta)\,\vec{a}+(\sin\theta)\,\vec{b}\\ \vec{p}=\overrightarrow{p_0}+(\sec\theta)\,\vec{a}+(\tan\theta)\,\vec{b}\\ \vec{p}=\overrightarrow{p_0}+t\vec{a}+t^2\vec{b}\end{array}\right\}\cdots\cdots④$$

と媒介変数表示されるから，空間で考えても平面と同様のことが成り立つ．（④の媒介変数及びその周辺の話題については拙著[2], [3]を参考にしていただきたい）.

（以下次号に続く）

〈参考文献〉

[1]　齋藤正彦　線型代数入門　東京大学出版会
[2]　小室久二雄　代数・幾何　オカミ書店
[3]　小室久二雄　固有値と不動だ円
数学教育（19）1987　304-309
[4]　岩田至康　幾何学辞典1，2　槙 書店

（清真学園高等学校）