授業実践報告

“2進法”の教材化と授業展開

“ネピアの問題”の授業報告から

神永　浩（かみなが　ひろし）

1．はじめに

“高等学校で数学を終える生徒達のための教材”を求める声が年々大きくなってきている．この声に耳を傾けるとき，次の2つのことが考えられる．

① 高校進学率が90％を超えている現状では，大学等への進学は考えないが，「高校だけは卒業したい」という生徒も多い．彼らの多くは入学時から“数学は高校まで”と考えている．

② 大学等への進学を目標に高校へ入学したが，2年生・3年生と進級するにつけ，数学が嫌いになり，入試科目に数学のない文系の私立大学等への進学を決めた生徒達．多くの学校では，3年生になると進路別のクラス分けを行っており，彼らは“私立文系（短大）コース”に入っている．

冒頭で述べた教材は，上記の①，②のいずれの生徒達にもヤル気を起こさせ，かつ，数学的な見方・考え方を身につけさせることのできるものでなければならない．以下に，昭和63年度大阪府立今宮高等学校（前任校）での授業実践を報告するが，本教材の展開においても，生徒の興味を引く為のパズルだけで終わってしまうことがないように留意した．

2．実践にいたる経過

大阪府立今宮高等学校（前任校）は1学年12クラスの普通科高校である．卒業後の進路は，就職希望者が20名前後，男子はほとんどが4年制大学，女子も短大・医療系専門学校等を含めてほぼ全員が進学を希望している．昭和63年度の3年生は“理系クラス”（微積，復習）が3クラス，“共通一次・医療系クラス”（数Ⅰ，代・幾，基解の復習）が2クラス，“私立文系クラス”（数Ⅰの復習）が7クラスであり（この割合は毎年ほぼ変わらない），1クラスは46～48名から成っている．

前項での②の生徒達が7クラス（“私立文系コース”）であり，週当たり3時間（3単位）問題集（「ジュニアセレクト数学Ⅰ＜受験編＞」―数研出版―）を用いて数Ⅰの復習をしているが，昭和63年度はその中に自主教材による時間を作ることにし，私が担当することになった．

1時間の授業にプリント1枚分の教材を作ったが“練習問題”や“問い”を多く入れるようにした．また，教具等で簡単に作れるものは1人1組ずつ用意して，自分の手を動かし，自分の目で見て，自分の頭で考え，自分で問題を解いていくことによって理解したことを定着させるようにした．

なお，評価については，1つのテーマごとにレポートを課し，中間・期末考査に替えることとした〔1つのテーマにつき5時間を目安とし，1年間で5つのテーマにつき授業をした〕．

本稿では，1学期当初より中間考査までの5時間分のテーマとして授業展開してきた“**2進法**”について，その実践報告と生徒達のレポートのいくつかを紹介したい．なお，5時間分の内訳は次のとおりである．

1時限目――導入（6枚のカードを使った“年齢あてゲーム”を使う），自然数を2のベキ乗和で書き換え，2進法表示にする．

2時限目――10進法 ↔ n 進法の練習（自然数から小数まで），入試問題等による演習，2進法の歴史（易経～ライプニッツ～コンピューター）．

3時限目――2進法を応用したゲーム・問題等，特に“ネピアの問題”（次項で詳説）を用いて，「等比数列の和」「数学的帰納法」の復習．

4時限目――2進法の応用として，パンチカード

による並べ替えを実験させる. ── コンピューターが成績順に並べ替える原理や“ビット数”についても考える.

5時限目 ──“ハノイの塔”── 生徒達に作業させた後で「2進法による解読」を考え,「漸化式」の考え方と復習をする.

次に授業展開の例として, 3時限目の“ネピアの問題”の実践報告を紹介する.

3. 授業から ──“ネピアの問題”

（問題） 天秤と, 10個の分銅がある. いま10個の分銅を1グラム5個, 5グラム5個とする. これらを使えば, ものの重さを1グラムから, 2グラム, 3グラム, ……と1グラム単位で30グラムまで, もれなく量ることができる.

では, 10個の分銅で, もっとたくさんの重さを量れないだろうか？ また, 10個の分銅で, 1グラムから最高何グラムまでを, 1グラム単位でもれなく量ることができるだろうか？ ただし, 量りたいものと分銅とは, いつも反対側の皿にのせて量るものとする.

この問題を考えてみよう. 1グラムの分銅を1個減らし, 10グラムの分銅を1個つけ加えると, 39グラムまでをもれなく量ることができる. 更に1グラムの分銅を1個減らし, 10グラムの分銅を1個つけ加えると──10グラムの分銅2個, 5グラムの分銅5個, 1グラムの分銅3個となって, 分銅とものを反対側の皿にのせる条件では, 4グラムが量れないので, この場合は3グラムまでとなる（48グラムではない）.

以上を説明して, 生徒達に予想させてみる. 100～300グラムを予想する者が多く, 500グラムを超える者は, まずいない.

「友達と相談してよいから, 1グラムでも多く量れるように分銅の重さを考えてみなさい. 制限時間は10分.」── 机間巡視しながら質問に答え, 問題の意味を説明していく. 1人で考える者, 数人で一緒に考える者, それぞれ一生懸命に問題に取り組んでいるようだ. 机間巡視の後で, 次のような考え方を示し, 生徒と一緒に解答を導く.

（考え方） 分銅が1個のとき, 2個のとき, ……と1個ずつふやしていくことを考える.

（解答）

分銅が1個のとき……1グラム ── ①

分銅が2個のとき……1グラムの分銅はあるのだから, 2グラムの分銅を加えれば3グラムまで量れる. 式にすると $1+2=3$ ── ② となる.

分銅が3個のとき……「上の状態のとき, 何グラムの分銅を加えればよいか？」── ボンヤリしている生徒を指名すると, すぐには答えられない. もう一度生徒のペースで考えさせる. ── 1グラムと2グラムで3グラムまで量れているのだから（②式）, 次の4グラムを加えてみると, 1グラムと2グラムと4グラムの3個の分銅では, 7グラムまで量れる（もし, 4グラムに替えて5グラム以上の分銅を加えると, 4グラムは量れないし, 3グラム以下の分銅だと7グラムまでは量れない）. ①, ② と同じく式にすると $1+2+4=7$ ── ③ となる.

分銅が4個のとき……1グラムと2グラムと4グラムの3個の分銅で7グラムまで量れているのだから, 次の8グラムを加えると, 15グラムまで量れる. $1+2+4+8=15$ ── ④ となる.

以下同じように考えると

分銅が10個のとき

$$\underbrace{1+2+4+8+\cdots\cdots+512}_{(10個)}=1023 \quad ── ⑩$$

となり, 1023グラムまで量れる.（解終）

生徒達は, 最初の予想と大きく離れている（たった10個の分銅で1グラムから1キログラム以上のものの重さをもれなく量ることができる！）ことに驚きながらも, 上のような考え方に興味を示し, 次の展開に注意を集中している.

「分銅が10個のときの式 ⑩ の左辺だけを見よ. このたし算の簡単な計算方法がわかる人はいないか？」と聞いたら,「アッ, 等比数列の和や.」と気付く者がいる. また, 最初から等比数列の和の公式で計算していた者も何名か名乗り出る. そこで等比数列の和の公式 $\boldsymbol{S=\frac{a\cdot(1-r^n)}{1-r}=\frac{a\cdot(r^n-1)}{r-1}}$ の復習と, 初項, 公比, 項数の意味（特に項数には注意をする）などについて簡単に話をする.

「ここで ⑩ 式の各項の数字をもう一度よく見てみ

よう．どうなっているか？」── この時間までに自然数（10 進数）を 2 のベキ乗の和で表し，2 進法で書く練習をしているのであるが，忘れている者がいる．思い出させて，定着させるようにする．

更に，$1=2^0$，$2=2^1$，$4=2^2$，……，$512=2^9$ というように，10 個の分銅の重さを 2 のベキ乗で書き，それぞれの分銅に 1 番から 10 番までの番号をつけると，1 グラムから 1023 グラムまでの 1 グラム単位の重さは，1 番から 10 番までの 10 個の分銅のそれぞれを，使うか使わないかで決めることができる．そして，使う分銅を **1**，使わない分銅を **0** で書くことにすれば，量るものの重さは **1** と **0** の 2 つの記号で表すことができる（2 進法で表せる！）．

例えば，1 番と 2 番の分銅を使い，他の分銅は使わないとき，$2^0+2^1=3$（グラム）で，これは 2 進法での **11** となり，1 番と 4 番と 6 番の分銅だけを使うときは，$2^0+2^3+2^5=41$（グラム）となり，2 進法では **1 0 1 0 0 1** となる．逆に，ものの重さがわか

$\left(\begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \end{array}\right)$

っているとき，どの分銅を使えばつり合うかも知ることができる（10 進法 ⟶ 2 進法）．例えば，100 グラムのものにつり合う分銅を見つけようとすれば，$100=64+32+4=2^6+2^5+2^2$ であるから，2 進法では **1 1 0 0 1 0 0** となり，3 番と 6 番と 7 番の分

$\left(\begin{array}{ccccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2^6 & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \end{array}\right)$

銅を使えばよいことがわかる（このことから，10 個の分銅でもれなく量ることができるのは 1023 グラムまでであること，また，分銅の組み合わせはこの方法しかないことがわかる）．

ここで，分銅の個数は 2 進数の桁数となっているが，この数（分銅の個数＝2 進数の桁数）を“ビット数”と言い，情報処理等で使われている（この数は，次の時間の“パンチカード”ではパンチ（穴）の数，その次の“ハノイの塔”では塔をつくる円盤の数になっている）．

「では，分銅が 10 個でなく，一般に，n 個の分銅では何グラムまで量ることができるか？　量りたいものと分銅とは，いつも反対側の皿にのせるという条件は同じである．」── 今までの流れから，分銅が n 個のときには，$1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{n-1}=2^n-1$（── Ⓐ）グラムまで量れることは，等比数列の和の公式から，すぐに導くことができる．

「上式 Ⓐ では，左辺にも右辺にも文字 n が含まれている．このような等式の証明に“数学的帰納法”が力を発揮したことを思い出して欲しい．等比数列の和の公式を知らなくても，分銅が 1 個のとき 1 グラム，2 個のとき 3 グラム（2^2-1），3 個のとき 7 グラム（2^3-1），…… と考えていくと，n 個のとき（2^n-1）グラムが予想できる．このような考え方を帰納的推論といって大切な考え方だ．分銅が n 個のとき（等式 Ⓐ）を数学的帰納法で証明してみよ．」──残り時間が少なく，この証明は板書しながら簡単に説明しただけであったが，“ネピアの問題”に関して，次のようなレポート課題を出し，そこで数学的帰納法による証明を求めた（下の課題の ③ の問題）．

（課題）　天秤と分銅を用いて，ものの重さを 1 グラム単位でもれなく量りたい．いま，量るものと分銅を同じ皿にのせてもよいとすると，分銅の数が次のとき，1 グラムから最高何グラムまでを 1 グラム単位でもれなく量ることができるか？

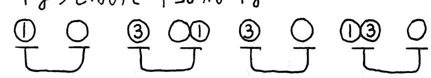
① 分銅が 2 個のとき
② 分銅が 10 個のとき（理由を書くこと）
③ 分銅が n 個のとき

この課題に対する生徒達のレポートから，いくつかを次に紹介してみる．

4．生徒のレポートから

7組 26番　　生駒 愛

① 分銅が2コのとき
1gごとなので 1こめは 1g



〈1g〉　〈2g〉　〈3g〉　〈4g〉

$1(g)+3(g)=4(g)$

4g

② 分銅が10コのとき
分銅が1コのとき；1gまで
分銅が2コのとき；4g（1+3）まで
1g+1g ⇒ 1gと2gしかはかれない
1g+2g ⇒ 1g，2g，3gはかれる
1g+3g ⇒ はかるものと同じ皿にのせれるので ①より 4gまで

分銅が3コのとき；13g (1+3+9)まで

∵ 5(g) → 9−(1+3)

6 → 9−3

7 → 9+1−3

8 → 9−1

9 → 9

10 → 9+1

11 → 9+3−1

12 → 9+3

13 → 1+3+9

符号が＋ ＝ はかるものの逆側に分銅をのせること

符号が− ＝ はかるものと同じ皿に分銅をのせること

を意味する

① ③ ⑨ (27) (81) (243) (729) (2187) (6561) (19683) ⇒ 使う分銅

と考えると 10コでは

1+3+9+27+81+243+729+2187+6561+19683 = 29524 つまり

$3^0+3^1+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7+3^8+3^9$
$= 29524$

ということである → ③

29524 g

③ 分銅がnコのとき

②の結果より 3^0から次数を1ずつ上げた数の分銅を使えばよいことがわかる

$\leftarrow 3^0+3^1+3^2\cdots\cdots \underbrace{3^{n-1}}_{n\text{コめ}}$

公比3の数比数列（初項は1）である

$$S_n = \frac{1(1-3^n)}{1-3} = -\frac{1-3^n}{2} = \frac{3^n-1}{2}$$

$$\rightarrow ② \ \frac{3^{10}-1}{2} = \frac{59049-1}{2} = \frac{59048}{2}$$

$= 29524(g)$

$\dfrac{3^n-1}{2}$ g

6組27番　角野　純

nこの時 $\dfrac{3^n-1}{2}$

証

① n=1の時 $\dfrac{3^1-1}{2} = 2/2$ で成立

② n=kの時 $\dfrac{3^k-1}{2}$ まで測れる

k+1の時 3^k をふやすと

$$\frac{3^k-1}{2}+3^k = \frac{3^k-1+2\cdot3^k}{2}$$

$$= \frac{3\cdot3^k-1}{2} = \frac{3^{k+1}-1}{2}$$

となって成立

$\therefore \dfrac{3^n-1}{2}$

なお，この問題の解法には“ケプラー式3進法”と呼ばれる，次のような変形3進法を用いる方法がある．── 3進法での，**0**，**1**，**2** の替わりに，**0**，**1**，**−1**（**−1** を表す桁数字を − とする）を使うと

$1=1(=3^0)=[\,1\,]_K$

$2=3-1(=3^1-3^0)=[\,1\ -\,]_K$

$3=3(=3^1)=[\,1\ 0\,]_K$

$4=3+1(=3^1+3^0)=[\,1\ 1\,]_K$

$5=9-3-1(=3^2-3^1-3^0)=[\,1\ -\ -\,]_K$

⋮

$10=3^2+3^0=[\,1\ 0\ 1\,]_K$

$50=3^4-3^3-3^1-3^0=[\,1\ -\ 0\ -\ -\,]_K$

$100=3^4+3^3-3^2+3^0=[\,\underset{3^4}{1}\ \underset{3^3}{1}\ \underset{3^2}{-}\ \underset{3^1}{0}\ \underset{3^0}{1}\,]_K$

などのように，すべての自然数を **1**，**0**，− で表すことができる．ここで，**1** は分銅をものと反対側の皿にのせること，**0** は分銅を使わないこと，− は分銅をものと同じ側の皿にのせることに対応している．上の例で言えば，10グラムのものを量るには，3^2（＝9グラム）と 3^0（＝1グラム）の分銅をものと反対側の皿にのせ，3^1（＝3グラム）の分銅は使わないようにすればよく，100グラムのものを量るには，3^4（＝81グラム），3^3（＝27グラム），3^0（＝1グラム）の分銅をものと反対側の皿にのせ，3^1（＝3グラム）の分銅は使わないで，3^2（＝9グラム）の分銅はものと同じ側の皿にのせればよいことがわかる（したがって，この条件では n 個の分銅を 3^0，3^1，3^2，……，3^{n-1} グラムとすればよく，量れる重さは，

$3^0+3^1+\cdots\cdots+3^{n-1}=\dfrac{3^n-1}{2}$ グラムまでとなる).

5．おわりに

いままでに“パンチカード”や“ハノイの塔”などを教材にして“2進法”の授業をしてこられた先生方のすぐれた実践も数多く報告されているが，今回，前任校における実践を報告することになり，いままで教材化されることの少なかった“ネピアの問題”と呼ばれている，分銅でものの重さを量る問題を教材とした授業展開を紹介した．

前任校では，全く初めての試みであったが，「授業をやってみた感想」を述べておきたい．

① 自主教材授業の計画は，1年間を1学期中間考査まで，～1学期末考査まで，…… のように区切り，1つの区間に1つのテーマとした（“2進法”の応用として広く知られている“三山崩し（ニム・ゲーム）” の必勝法等，今回の授業展開（5時間分）では教材としなかった）．生徒達には，テーマがはっきりしていてよかったと思う（このあと1学期末までは“黄金比”，2学期以降，“複素平面”，“図形問題”，“魔方陣”をテーマとして授業をした）．

② レポート課題は，予想以上によくできていた（内容については紹介したが，他人のレポートの丸写しもなかった）．

③ 文科系7クラスは大変だと思っていた（昨年度は他に理科系クラスで，“微分・積分”を9時間分担当していた）が，初めての教材なので7クラスそれぞれの授業展開ができてよかった（生徒達のレポートにも，クラスごとに特徴が感じられた）．

④ “私立文系コース”の数学の中に，自主教材による時間を設けることは，年度の直前に決定したので，教材の準備・教材研究の時間が少なかったが，小林平三郎先生には本教材のもとになるアイデアを頂き，最後まで御指導頂いた．また，村上寛明先生他，大阪高等学校数学教育会「教材開発委員会」の先生方から大変有用な示唆を頂いた．

最後に，本稿の執筆については，馬越洋一先生より懇切なる御指導を頂いた．感謝の意を表したい．
（尚，この教材についての問合せは，大阪府立天王寺高校の神永浩に願います．）

＜参考文献＞

- 二進法：野崎昭弘（共立出版ワンポイント双書）
- ゼロから無限へ：C．レイド著，芹沢正三訳（講談社ブルーバックス）
- 数学歴史パズル：藤村幸三郎・田村三郎（講談社ブルーバックス）

（大阪府立天王寺高等学校）