絶対値の指導について

杉（すぎ）　昭重（あきしげ）

1．はじめに

数Ⅰの授業をひと通り終えた今，これまでの授業を振り返ってみて，生徒の理解が今ひとつ不十分だったものに絶対値がある．定義そのものは簡単であるにもかかわらず，文字が入ってくると極端に理解度が低くなる．十分な時間をとって授業を進めれば，生徒の理解も良くなるのであろうが，できるだけ早く教科書を終えようとする現在の授業の進度とのからみで，そうもいかないのが実情である．以下において，指導の実際と反省，今後はこういう授業の進め方をしてみたいといったものを，絶対値の定義等も織り交ぜて述べてみたい．

2．絶対値の定義と指導

絶対値については，中学１年の早い時期に学習する．教科書には次のように定義されている．

> 数直線上で，数を表す点と原点との距離を表す数を，その数の絶対値という．また正負の数から，その符号を取り去ったものが，その数の絶対値であるとみることもできる．

絶対値の記号 $|\ \ |$ は使用されておらず，絶対値ということばだけで処理されている（例えば，-3 の絶対値は 3 である）．

中学校でのこういった指導を踏まえて，高等学校では，実数 a の絶対値について，次のように学習する．

> 実数 a の絶対値は，記号 $|a|$ で表され，次のように定められる．
>
> $a\geqq 0$　のとき　$|a|=a$
>
> $a<0$　のとき　$|a|=-a$
>
> 例えば，$|4|=4$，$|-4|=-(-4)=4$
>
> である．
>
> また，a の定め方から，絶対値 $|a|$ は，数直線上で，a を座標とする点Pと原点との距離に等しい．

教科書では絶対値について，２つの定義の説明だけで終わっており，これについての演習問題らしきものはない．よって実際の授業においては，生徒の理解を深める意味でも，当然，補充説明と問題をやらなければならない．実際の授業では，$|a|$ の絶対値の記号のはずし方に重点をおいた．$|\ \ |$ の中身が正の時はそのまま，$|\ \ |$ の中身が負の時は－をつけてはずす，という説明をして

$$|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0\ \text{のとき}) \\ -a & (a<0\ \text{のとき}) \end{cases}$$

という式を強調して書く．絶対値の定義についてはこの定義（以下，これを定義①とする）の方が高校では重要と考えていたので，原点との距離であるという中学校で既習の定義（以下，これを定義②とする）については，教科書どうりの説明でそれほど補充説明はしなかった．定義①については，これだけでは物足りないので，$|a-1|$ の絶対値記号をはずすには，

$a-1\geqq 0$　即ち　$a\geqq 1$　のとき　$|a-1|=a-1$

$a-1<0$　即ち　$a<1$　のとき　$|a-1|=-(a-1)$

とすることを追加説明する．

次に，平方根の説明に入り，絶対値 $|a|$ の定義とあわせて

$$\sqrt{a^2}=|a|$$

と書き表せることを説明し，

$$\sqrt{(-3)^2}=-(-3)=3$$

程度の演習問題を２，３題やって，１時間の授業を終えた．

そして，夏休みの課外の時に次のような絶対値の問題をやってみた．

問題

$x=a^2+1$ のとき，

$\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a}$ 　をaで表せ．

(解)
$$
\begin{aligned}
&\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a} & ①\\
&=\sqrt{a^2+1+2a}+\sqrt{a^2+1-2a} & ②\\
&=\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-1)^2} & ③\\
&=|a+1|+|a-1| & ④
\end{aligned}
$$

(i) $a\geqq 1$ のとき　$(a+1)+(a-1)=2a$

(ii) $-1\leqq a<1$ のとき　$(a+1)-(a-1)=2$

(iii) $a<-1$ のとき　$-(a+1)-(a-1)=-2a$

この問題に関する生徒の反応をみていると，何をやっているのか全然わからないというのが大半であった．生徒達がどこがわからないのか，何がわからないのか，この問題の解答のあと，少し時間をとって生徒達に聞いてみた．生徒達の質問を列記してみると，大体以下のようになる．

一番多かったのが，(ア) ④において，どうして答が3つに分かれるのか．

次は，(イ) $\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|$，$\sqrt{(a-1)^2}=|a-1|$ とどうして変形できるのか，③がわからない．

更に，(ウ) $a\geqq 1$，$-1\leqq a<1$，$a<-1$ という3つの分け方はどこからきたのか．

という順であった．少数ではあったが，

(エ) どうして $a\geqq 0$ と $a<0$ に分けないのか．

(オ) $|\quad|$ の意味がわからない．

(カ) a で表せ，というのはどういう意味か．

(キ) $|a+1|+|a-1|$ 　で終わってはいけないのか．

という質問もあった．

この問題がやさしくない問題であることはわかるが，それにしても大部分の生徒がよくわからないというのは，初期の絶対値の指導が不十分と考えざるを得ない．生徒達の質問の内容を統合，整理して，自分なりに分析したうえで，生徒のとまどいを考えてみると

(ア) 数学は答が1つで簡潔だから好きなのに，なぜ答が3つにも分かれるのか．

(イ) $|\quad|$ はどうしてはずさなければいけないのか．

(ウ) $\sqrt{(a+1)^2}$ は $a+1$ なのに，$-(a+1)$ となるのはどうしてもわからない．

(エ) $|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$ と $a\geqq 0$ と $a<0$ で分けるのに，どうして別な分け方をするのか．

(オ) $|\quad|$ は原点からの距離なのに $|a+1|$ は何を意味するのか．

等々が挙げられる．これらはいずれも導入の部分において指導しておく必要があると考える．

3．絶対値に対する生徒の意識

絶対値に関しては，後で絶対値の記号を含む方程式，不等式を指導する意味でも，その知識がどの程度のものか，生徒にアンケートをとってみた．アンケートの内容とその結果を以下に示す．

(1) 実数 a の絶対値は $|a|$ と書かれますが，$|a|$ の定義を書いてみて下さい．

(a)	$a\geqq 0$ のとき $|a|=a$，$a<0$ のとき $|a|=-a$	…… 2名
(b)	数直線上で原点との距離	…… 6名
(c)	わからない	…… 28名
(d)	符号をとったもの	…… 3名
(e)	符号がない値	…… 1名
(f)	$-\square$ や $+\square$ の $\square$ の中の数字	…… 1名
(g)	$-a$ や a をいう	…… 7名
(h)	＋と－の数が同じもの	…… 1名
	計	49名

(2) 実数 a の絶対値 $|a|$ は，次のように2つの定め方がありますが，あなたはどちらが理解しやすいですか．

(a) $|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$ …… 17名

(b) 数直線上で点 a を座標とする点と原点との距離 …… 32名

(3) 次の文が数学的にみて正しければ○，正しくなければ×を書きなさい．ただし a は実数とする．

	○	×	？
(a) $-a$ は負の数である．	15名	34名	0名
(b) $\sqrt{a^2}$ は正と負，2つの答がある．	18名	29名	2名
(c) $\sqrt{a^2}=|a|$ である．	34名	9名	6名
(d) $|a-1|$ は $a<1$ のとき，負の数である．	30名	9名	10名
(e) $|-a|^2=-a^2$ である．	13名	22名	14名

(f) $\|-a\|<\|a\|$ である.	19名	17名	13名
(g) $\|a\|>0$ である.	14名	27名	8名
(h) $\|a\|=3$ なら $a=3$	17名	27名	5名

以上の結果を分析してみると，絶対値の定義については，中学校で定義②を学習しており，定義①が今ひとつわかりにくいことや，指導時間も短かったこともあり，絶対値に関しては定義②で理解している，かつ符号をとったものというイメージでとらえている者が多い．$-a$ は $a<0$ のとき正になるという答を出している者が多かったが，これは改まって $-a$ は負の数ですか，と聞かれたためで，問題解答という急いでいる場面では，$-a$ は負の数としてとらえている者が多いと思われる．また，生徒達が以外とわかっていないのが，$|a|\geqq 0$ であるということである．時々，$|-4|=-4$ と答える生徒も多い．

絶対値の定義については，多くの教科書では定義①を主として定義しており，定義②は付加的に扱っている．この逆の教科書も2，3存在し，どちらが良いとも言えないが，生徒の実情，今後の指導も考えるとどちらも対等に扱っていくのが望ましいと考える．

4．入試問題にみる絶対値

今後，絶対値を指導していく上でも，実際の入試で絶対値がどのくらいの割合で出題されているのか，どのような形式で出題されているのか，把握しておいた方が良いと思われたので，国公立大学の二次試験問題で調べてみた．そんなに多くはないだろうと思って調べてみたが，昭和63年の問題では，以外にも多くの大学で出題されており，実に2，3校に1校の割合で出題されていた．出題分野も多岐にわたっており，定義①も定義②もいずれの定義も問題解決には重要である．特に東日本の大学では出題する傾向が強いようである．2，3の例を挙げてみたい．

積 分

$x\geqq 0$ のとき，$f(x)=\int_0^2 |t^2(t-x)|\,dt$ を求めよ．

（北海道大学）

微分係数

関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ は $|x|<1$ で $|f(x)|\leqq 1$ を満たしている．このとき，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ について $|f'(x)|\leqq 4$ を示せ．

（東京工業大学）

三角不等式

$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす x の範囲を求めよ．

$$2\sin x\leqq\left|\sqrt{1+\cos 2x}-\sqrt{1-\cos 2x}\right|$$

（広島大学）

この他にも，ベクトル，2次曲線，数列，対数，確率，行列，数Ｉの分野で出題されており，絶対値は多くの分野で応用されている．このことからみても絶対値に関するしっかりした知識をその導入の時から指導しておく必要性を痛感する．

5．絶対値の指導の工夫

絶対値の記号｜　｜は，数学の教科書のいたる所に顔を出す．数学の公式にも，｜　｜を含むものが多い．｜　｜の記号を含む式は生徒にとってわかりにくく，苦手な分野でもあるだけに，その基礎基本をしっかりと把握させなければならない．そのためにも導入のときが大切である．できるだけわかりやすく教えるにはどうすればよいのか．入試問題のことも頭に入れて，よりよい指導を考えてみた．

絶対値の定義には，次の2つがあるが，まずどちらを先に指導するかに関しては，中学校で定義②を

① $|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0) \\ -a & (a<0)\end{cases}$

② 数直線上で，原点との距離

指導しているので，復習の意味も兼ねて，絶対値の記号にはふれないで，定義②を先に指導し，原点との距離だから，-3 の絶対値は3であるということから始める．次に，絶対値の記号｜　｜を説明し，-3 の絶対値は $|-3|$ と表してみる．また，絶対値は符号を取り去ったものという把握もあるので，

$|-3|=3$ 　　も説明する．

高校では数字の代わりに文字を使う場合が多い．そこで，a を実数とするとき，実数 a の絶対値は $|a|$ で表す．a は実数であるから，正の数か0か負の数かの3つの場合がある．$a>0$ のとき $|a|=a$，$a=0$ のとき $|a|=0$ は明らかだが，a が負の数，$a<0$ のときは，a から符号を取り去ることはできない．距離は正または0だから，$|a|\geqq 0$ より負の数 a を正の数にするにはどうするか，負の数 a に (-1) を掛け

れば $-a$ は正の数となる．よって，$a<0$ のとき $|a|=-a$ となる．

これらをまとめて，

$$|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

また，| |の中身が整式のとき，たとえば $|a-2|$ の | |をはずすにはどう考えるか．

考え方① $|a-2|$ は数直線上で a と 2 を座標とする 2 点の距離と考えることもでき，

$a\geqq 2$ のときは $|a-2|=a-2$

$a<2$ のときは $|a-2|=2-a$

となる．

考え方② $|a-2|$ の | |をはずすには，| |の中身が正負で判別する．即ち

$a-2\geqq 0$, $a\geqq 2$ のとき

$|a-2|=a-2$

$a-2<0$, $a<2$ のとき

$|a-2|=-(a-2)$

必要に応じて次のような例題と問題を解く．

（例題） $x=3$ のとき，$|x+5|-|x-5|$ の値を求めよ．

（問題） $|a-3|$ の絶対値記号をはずせ．

（問題） 次のおのおのの場合に，$|a-2|+|a+2|$ を簡単にせよ．

(1) $a\geqq 2$ のとき

(2) $-2\leqq a<2$ のとき

(3) $a<-2$ のとき

次に平方根の指導に入る．2乗すると a になる数を a の平方根という．正の数 a の平方根は正と負の2つあり，正の方を $\sqrt{a}$，負の方を $-\sqrt{a}$ と書く．

例えば 25 の平方根は $\sqrt{25}=5$ と $-\sqrt{25}=-5$ の2つである．a^2 の平方根は $\sqrt{a^2}$ と $-\sqrt{a^2}$ で $\sqrt{a^2}$ は正の数である．$\sqrt{a^2}\geqq 0$ であり，

$a\times a=a^2$, $(-a)\times(-a)=a^2$

であるから

$a\geqq 0$ のときは $\sqrt{a^2}=a$

$a<0$ のときは $\sqrt{a^2}=-a$

が得られる．絶対値の定義とあわせて，

$\sqrt{a^2}=|a|$

と書き表される．また $\sqrt{(a-1)^2}=|a-1|$ である．

（例題） $\sqrt{(a-1)^2}=|a-1|$ より

$a\geqq 1$ のとき $a-1$

$a<1$ のとき $-(a-1)$

（問題） $\sqrt{(a-3)^2}+\sqrt{(a+3)^2}$ を簡単にせよ．

6．おわりに

以上のような内容で，次回の授業ではやってみたいと思う．入試でも多く出題されており，2，3年になると絶対値記号 | |を扱う問題が多くなるので，導入の部分で，| |をはずす場合分けについて少しでも多くの者に理解させ，次なる分野に進ませたいものである．場合分けは，絶対値以外でも関数，不等式など多くの分野で必要となるので，その先がけとして，絶対値における場合分けを徹底させたいものである．

（使用教科書） 数研 新編 数学Ⅰ

（福島県立福島東高等学校）