FERMATの問題によせて

塩田　徹治（しおだ　てつじ）

昨年の春(1988年3月)沈丁花の香る頃，というより高校の先生方や学生諸君には学年末とか大学受験シーズンが一段落した頃，といった方がピンとくるかもしれないが，日本のみならず世界中を駆けぬけた1つの大きなニュースがあったことを記憶していられる方も多いかと思う．それは，世界を動かす政治や経済上のニュースではなく，純粋に知的な事柄，すなわち数学の有名な未解決の問題の1つである**フェルマーの問題**(標題)が解けたらしい，しかもそれが西ドイツで研究中の若い日本人数学者によってなされた，というものであった．

筆者は，たまたま2月の末から2ヶ月程，ボンのマックス・プランク数学研究所に招かれていたが，ボンに到着したその日に，宮岡洋一氏の講演があり，このフェルマーの問題を解決するための新しい方法のアイディアを聞いて，強い衝撃を受けたものである．しかし，それから数ヶ月を経た現在，この証明方法は不十分であり，フェルマーの問題は未だ解決されていない，ということははっきり指摘しておく必要があろう．

ともかく，数学の問題がこれほど一般の人々の関心を集めたのは極めて稀なことである．

以下は，数学にちょっぴり関心を持っている高校生のKさんと，S先生の会話である．

問題の由来

S先生：　フェルマーの問題ってどんなことだか知っているかな？

Kさん：　たしか

(1)　$$x^n+y^n=z^n$$

という方程式が解をもたないとかいう……

S先生：　そうですね．もう少し正確にいうと，

(2) 3以上の自然数 n に対し，(1)を満たす自然数 x，y，z の組は存在しない．

これを証明せよ，というのがフェルマーの問題です．

Kさん：　どうしてこんな問題を考えるのでしょう？

S先生：　これは良い質問ですね．それには，問題の由来というか歴史を少し振り返ってみる必要がありますね．**フェルマー**(Pierre de Fermat)という人は，西暦1601年生まれ(日本では徳川時代のはじめ頃)，1665年没のフランスの数学者です．フェルマーよりずっと前の時代，3世紀の**ディオファントス**の本の中で，方程式(1)の $n=2$ の場合，すなわち

(3)　$$x^2+y^2=z^2$$

が考えられていたそうです．この場合は，たとえば

$$3^2+4^2=5^2$$

のように，自然数の解があり，しかも解が無数にあることが分かっています．これについては，あとでもっと詳しくお話ししますが，ともかくフェルマーはディオファントスの本を読んでいて，この $n=2$ の場合に関連して，「$n\geqq 3$ のときは解がないこと」，つまり(2)を証明できたけれども，「その証明を記すには，この本の余白は狭すぎる」という言葉を書き残したのだそうです．それで後の人は，この結果を**フェルマーの大定理** 又は **最終定理** とよんだわけです．

Kさん：　それではフェルマー自身が証明できていたのですか？

S先生：　それは断定できませんが，n が3とか4とか比較的小さい時には，はっきりした結果をもっていて，一般の場合も出来ると考えたのでしょう．しかし，その後の発展から見ると，多分一般の場合の証明はフェルマーは成功していなかったろうと考えられます．

ともかく，この問題は多くの数学者の興味をひきつけ，フェルマー自身をはじめ，オイラー，ルジャンドルといった有名な数学者達の努力で，$n=3$，4，5 のときは，その後200年ぐらいのうちに完全に証

明されたのです.

それ以後の発展

S先生：　ところで，たとえば $n=3$ のとき

(4) $$x^3+y^3=z^3$$

が自然数の解をもたないことが分かったとすると，n が 3 の倍数（6, 9, 12, ……）のときも

(5) $$x^n+y^n=z^n$$

は自然数の解をもたない，ということは分かるかな？

Kさん：　………

S先生：　これはいわれてみればすぐ分かります．背理法でやってみよう．n が 3 の倍数とすると，$n=3k$ となる自然数 k がある．この n に対して，上の方程式(5)が自然数解 x, y, z をもったとしよう．このとき，$X=x^k$, $Y=y^k$, $Z=z^k$ とおくと

$$\begin{aligned} X^3+Y^3&=(x^k)^3+(y^k)^3\\ &=x^n+y^n\\ &=z^n\\ &=Z^3 \end{aligned}$$

となって，(4)の自然数解 X, Y, Z が得られたことになり，矛盾が出る．

Kさん：　5 の倍数などでも同じことですね．

S先生：　その通り．したがって，フェルマーの問題を考えるとき，次数 n は，4 または 3 以上の **素数**（それ自身と 1 しか約数をもたない自然数）のときだけ考えればよいことになります．

Kさん：　こういう問題はコンピュータでは解決できないのでしょうか？

S先生：　これも良い質問ですね．まず素朴に考えて，x, y, z が自然数の値をとるとき x^n+y^n と z^n を比べて等しいかどうか確かめることは，原理的には可能なわけですから，与えられた n に対し，たとえば x, y, z が 100 以下の自然数とか，100 万以下の自然数というように，範囲を限定すれば，その範囲で $x^n+y^n=z^n$ が解をもつかどうかは確かめられることです（ただしコンピュータの能力——容量とか速度を考えた——が許すとしてのことですが）．しかし，こういうやり方では，1 つの n に対してもフェルマーの問題を解くことはできないことは明らかでしょう．

実際はもっと別のかたちでコンピュータが利用されて，数多くの n に対して，フェルマーの問題が確かめられています．それには，19 世紀の半ばに活躍したクンマーというドイツの数学者の仕事やその後の発展について話す必要があるのですが，ここではそういう話はやめて，ただ，フェルマーの問題のように具体的な問題を解決しようとする努力が，数学のもっと一般的な理論の発展を促し，それによって元々の問題が明らかにされていく，ということだけをいっておきましょう．フェルマーの場合は，**整数論**という分野を発展させ，その理論的成果に基づいて，更にコンピュータの計算能力を利用して，n が 125000 以下の素数のときに，フェルマーの方程式は自然数解をもたないことが確かめられました．これはもう 10 年も前の結果ですが，その後コンピュータの能力が著しく向上していますから，現在ではもっとずっと大きな素数 n に対しても，フェルマーの問題の答が分かっているはずです．

しかし，この方法でも，**すべての** n に対しての結果は得られないのです．そこで，今回ニュースになったように，新しい方法でこの古い問題に取り組むこころみが出てくるわけです．

Kさん：　私達が数学を学んでいるとき，数学というのは，何かとても完成されているもののように感じていたのですが，まだ分かっていないこともあって，それに挑戦している人達もいるのですね．

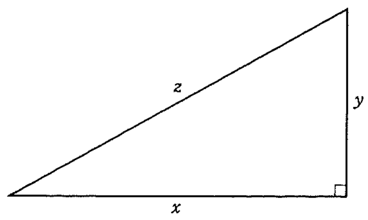
S先生：　そうなんです．学校で習う数学は，勿論完成されているのですが，数学の中で未知のことはたくさんあります．それは丁度，他の科学でも，素粒子の構造とか，生物の起源とか，多くの研究がなされていて，しかもまだ未知のことが多いというのと同様の事情です．

ピタゴラス数

S先生：　話を前に戻して“フェルマー以前”の問題，すなわち

(6) $$x^2+y^2=z^2$$

について考えてみましょう．これは，色々な意味で高校の数学とも関連しています．



図のように直角三角形の直角をはさむ辺の長さが x と y，斜辺の長さが z のとき，ピタゴラスの定理により，$x^2+y^2=z^2$ が成り立つ．このため，この式を満たす自然数 x，y，z の組を **ピタゴラス数** とよぶことがあります．たとえば？

Kさん：　たとえば

$$(x,\ y,\ z)=(3,\ 4,\ 5)$$

S先生：　そう．ほかにも

$$(x,\ y,\ z)=(5,\ 12,\ 13)$$

とか色々あるのです．実際，前にもいいましたが，**ピタゴラス数は，無数に存在し，それらをすべて決めること** ができます．

Kさん：　難しいのですか？

S先生：　いいえ．高校生でも分かる方法があります．それも，全くちがうやり方が **2通り** 考えられます：

① 整数の性質を使うやり方
② 幾何的な考え方を使うやり方

Kさん：　整数の性質といいますと，……

S先生：　整数の間では，**割り切れる** とか，**互いに素である** とかいうことが，はっきりした意味をもっていますね．

そこで，① の立場で，ピタゴラス数の満たす方程式

$$x^2+y^2=z^2 \tag{6}$$

を考えてみます．このとき，x と z (y と z も) が **互いに素** として考えて構いません．というのは，x と z に共通因数があれば，それは当然 y の約数にもなり，したがって (6) 式の両辺を，この共通因数の平方で割ることにより，x と z が互いに素（共通因子がない）な場合に帰着します．

さて，このとき，(6) を書き直して

$$\begin{aligned} y^2&=z^2-x^2 \\ &=(z+x)(z-x) \end{aligned} \tag{7}$$

と書いてみます．

x と z が互いに素のとき，$z+x$ と $z-x$ の最大公約数は，1 または 2 になることは，誰でもすぐに分かります．$(z+x,\ z-x)=1$ のときは，

$$\begin{cases} z+x=u^2 \\ z-x=v^2 \end{cases} \tag{8}$$

となるような自然数 u，v が存在することになり

$$\begin{cases} x=\dfrac{u^2-v^2}{2} \\ z=\dfrac{u^2+v^2}{2} \\ y=uv \end{cases} \tag{9}$$

となる．逆にこの式において，u，v を自然数で $u>v$，かつ u，v がともに偶数または奇数とすると，上の式 (9) により，ピタゴラス数 $(x,\ y,\ z)$ が定まります．

また，$(z+x,\ z-x)=2$ のときは，(7) 式は

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2=\frac{z+x}{2}\cdot\frac{z-x}{2} \tag{7$'$}$$

と書き直され

$$\left(\frac{z+x}{2},\ \frac{z-x}{2}\right)=1$$

だから，

$$\begin{cases} \dfrac{z+x}{2}=u^2 \\ \dfrac{z-x}{2}=v^2 \end{cases} \tag{8$'$}$$

となる自然数 u，v が存在し，したがって，前と同様にして

$$\begin{cases} x=u^2-v^2 \\ z=u^2+v^2 \\ y=2uv \end{cases} \tag{9$'$}$$

となる．ここでも，逆に，u，v を自然数で，$u>v$ となるものに対し，(9)′ 式でピタゴラス数 $(x,\ y,\ z)$ が定まります．

以上により，ピタゴラス数がすべて求められたことになり，特に，それらが無数にあることも分かったことになります．

たとえば，前に出てきた例 (3, 4, 5) は，(9)′ で

$$u=2,\quad v=1$$

とおいた場合に相当し，他方 (5, 12, 13) は同じく

$$u=3,\quad v=2$$

に対応しています．

Kさん：　今まで知らなかったけれど，(9) や (9)′ の式で，ピタゴラス数がすべて表されているなんて一寸感激です．ためしに (9) で

$$u=11,\quad v=1$$

とおいてみると

$$x=60,\quad y=11,\quad z=61$$

となるけど，……．このときも，

$$60^2+11^2=3600+121$$

$$=3721$$
$$=61^2$$
となるから OK！というわけですね．

幾何的方法

S先生： もう1つの幾何的な考え方を使う方法②も面白いので，紹介してみよう．

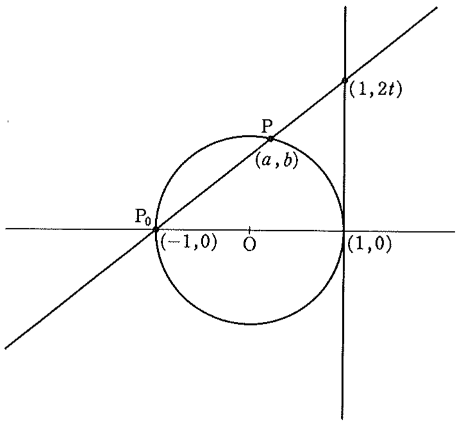
今考えている場合は (6)式，つまり
$$x^2+y^2=z^2$$
で $z \neq 0$ のときだから，
$$X=\frac{x}{z}, \quad Y=\frac{y}{z}$$
とおくと，(6)式は
$$X^2+Y^2=1 \tag{10}$$
すなわち，原点を中心とする **単位円の方程式** になります．更に，

x, y, z が自然数 $\Longleftrightarrow X, Y$ が正の有理数

（有理数＝±分数のこと）となるから，結局，問題は，**単位円(10)上の点（X，Y）で座標 X，Y がともに有理数となるもの，** を求めることに帰着します．

上のような点（X, Y)を **有理点** とよぶことにすると，たとえば
$$(X, Y)=\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right),$$
$$\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right),$$
$$\left(\frac{60}{61}, \frac{11}{61}\right)$$
などは，単位円上の有理点の例になります．更に (1, 0), (−1, 0), (0, 1) なども有理点の例です．

さて，次の図を見て下さい．



円周上の有理点を1つ，たとえば $P_0=(-1, 0)$ をとります．

円周上の任意の点 $P(a, b)$（ただし $P \neq P_0$)に対し，直線 $\overline{P_0P}$ の傾きは
$$t=\frac{b}{a+1}$$
で与えられる．逆に，P_0 を通る任意の直線を考えると，この直線と単位円は，P_0 以外に唯一つの点Pで交わる．しかも，この直線の傾きが有理数なら，その交点Pは，有理点になることは，容易に分かります．したがって，
$$P(a, b) \longleftrightarrow t=\frac{b}{a+1}$$
なる対応により，単位円周上の有理点 P(P_0 と異なるもの）と，有理数 t との間に1対1の対応ができます．

実際，t に対応して，a, b は次のように具体的に与えられることは直ちに分かります．
$$a=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad b=\frac{2t}{1+t^2}$$
以上により，t に有理数の値を代入すると，a, b という有理数が定まり，(a, b) は単位円上の有理点を与えることになり，これより，a, b の共通分母を z, a の分子を x, b の分子を y とすると，$x>0$, $y>0$ のとき (x, y, z) はピタゴラス数を与えることは明らかです．

この第2の方法でも，ピタゴラス数がすべて求まり，特に，それらが無限個あることが，分かって頂けたかと思います．

ここでの **キーポイント** は，**円(10)は2次曲線なので，P_0 を通る直線は，あと1つの点のみでこの円と交わる，** ということ，すなわち，前にあげた図のような状況が鍵になっているのです．

Kさん： 全然ちがう考え方の①と②という2つのやり方でも，同じ問題の答が出てくるのですね！

S先生： そういう所は，面白いでしょう？ここでは説明できませんが，①の考え方を少し拡張して，フェルマーの問題の $n=3$ の場合を解くことが可能です．しかし，幾何的方法②では，$n=2$, 即ち，円が2次曲線ということをフルに使っているので，この方法は，$n>2$ の場合には使うことは出来ないのです．

Kさん： 今日フェルマーの問題について色々お話を伺って，数学の問題を考えるということが，今ま

でより少し身近に感じられ，また同時に，とてもアイディアのいる仕事だと感じました．

S 先生：　そう，難しい所もあるけれど，とても魅力的な所もあり，それが人が数学をやってみようという気にさせるのでしょう．初等的なレベルでも，もっとすすんだレベルでも．ともかく，フェルマーの問題のように，問題の意味が普通の人にも通じるような問題の存在は貴重です．昨春のニュースの広がり方の大きさには，本当にびっくりさせられました．あなた方のような若い世代の方達が，数学とか，もっと一般的に知的な学問に興味を深めるきっかけにでもなれば，フェルマー先生も大喜びのことでしょう．

（立教大学）