等式 $\alpha^m+\beta^m=\alpha^n+\beta^n$（$m<n$, m, n は 4 以下の自然数）を満たす 2 根 α, β をもつ 2 次方程式について

茨城県立取手第二高等学校　数学科

1. はじめに

数学Ⅰのある試験問題にN先生が「2 次方程式 $2x^2+4x+3=0$ の 2 根を α, β とするとき，

(1) $\alpha^2+\beta^2$, (2) $\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ の値を求めよ.」という問題を出題された.

N先生が生徒の答案を採点しているうちに，(2) を $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$ という誤った通分をして求めても，正解と一致してしまうことに気づいた．もちろん，それは「$\alpha^2+\beta^2=\alpha^3+\beta^3$」となってしまうことに起因する.

そのとき，他にそのような方程式が明らかな場合（$x^2=0$,　$x^2-x=0$,　$x^2-2x+1=0$）を除いて存在するのだろうかということが話題にのぼった.

そこで，そのようなことについて考察をすすめてみた．以下，そのことについて簡単に報告しよう.

2. $\alpha^2+\beta^2=\alpha^3+\beta^3$ を満たす 2 根 α, β をもつ 2 次方程式

条件より　$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

ここで，$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$ とおけば

$$a^2-2b=a^3-3ab \quad \cdots\cdots ①$$

これを b に関して整理すれば

$$b(3a-2)=a^3-a^2 \quad \cdots\cdots ②$$

$a=\dfrac{2}{3}$ のときは ① は成立しない．よって，$a\neq\dfrac{2}{3}$ と仮定してよい.

② より

$$b=\frac{a^3-a^2}{3a-2} \quad \cdots\cdots ③$$

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$ を満たす　α, β を 2 根とする 2 次方程式は　　$x^2-ax+b=0$

ゆえに，③ より

$$(3a-2)x^2-a(3a-2)x+a^3-a^2=0 \quad \cdots\cdots ④$$

が求める方程式である．なお，a は $\dfrac{2}{3}$ 以外の任意の実数である.

いま，④ の判別式をとれば

$$\begin{aligned} D&=a^2(3a-2)^2-4(3a-2)(a^3-a^2)\\ &=-a^2(3a-2)(a-2)\end{aligned}$$

したがって，

㋐ $\dfrac{2}{3}<a<2$ のとき，α, β は実数

㋑ $a=0$, 2 のとき，$\alpha=\beta$

㋒ $a<0$, $0<a<\dfrac{2}{3}$, $a>2$ のとき，α, β は虚数

であることもわかる．N先生の問題は ④ で $a=-2$ の場合である.

次に，「$\boldsymbol{\alpha+\beta=\alpha^2+\beta^2=\alpha^3+\beta^3}$ **を満たす 2 根 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ をもつ 2 次方程式**」について考察してみよう.

条件より

$$\alpha+\beta=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$\alpha+\beta=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \quad \cdots\cdots ⑥$$

ここで，$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$ とおけば，⑤ と ⑥ より

$$\begin{cases} a^2-2b=a\\ a^3-3ab=a\end{cases}$$

この 2 式より b を消去すれば　　$a^3-3a^2+2a=0$

ゆえに，$a=0$, $b=0$；$a=1$, $b=0$；$a=2$, $b=1$ が得られる．よって，題意を満たす 2 次方程式は，定数倍を無視すれば，次の 3 つだけであることがわかる.

$$x^2=0,\quad x^2-x=0,\quad x^2-2x+1=0$$

3. $\alpha^2+\beta^2=\alpha^4+\beta^4$ を満たす 2 根 α, β をもつモニックな整係数 2 次方程式

条件より

$$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}^2-2\alpha^2\beta^2$$

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b$ とおけば

$$a^2-2b=(a^2-2b)^2-2b^2$$

b について整理すれば

$$2b^2+2(1-2a^2)b+a^4-a^2=0$$

これを b について解けば

$$b=\frac{2a^2-1\pm\sqrt{2a^4-2a^2+1}}{2} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

求める方程式はモニック（x^2 の係数が 1）で整係数（係数が整数）であるから，a, b は整数である．そのためには，

$$2a^4-2a^2+1=k^2\ (k\text{ は整数}) \qquad \cdots\cdots ⑧$$

の形をしていなくてはならない．

いま，$a^2=t\ (t\geqq 0)$ とおけば，⑧ は

$$2t^2-2t+1-k^2=0 \qquad \cdots\cdots ⑨$$

となる．これを t に関する 2 次方程式とみなせば，⑨ は正の整数解をもつことになる．したがって

$$D=1-2(1-k^2)\geqq 0 \qquad \cdots\cdots ⑩$$

$$1-k^2\geqq 0 \qquad \cdots\cdots ⑪$$

が同時に成立する．⑩ と ⑪ より

$$-1\leqq k\leqq -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\leqq k\leqq 1 \qquad \cdots\cdots ⑫$$

ところで，a は整数より k も整数，したがって，⑫ より $k=\pm 1$ ゆえに，⑧ より $a=0$, ± 1 を得る．したがって，⑦ より

$a=b=0$；$a=0,\ b=-1$；$a=1,\ b=0$；
$a=b=1$；$a=-1,\ b=0$；$a=-1,\ b=1$

を得る．ゆえに，求める 2 次方程式は次の 6 個である．

$x^2=0,\ x^2-1=0,\ x^2-x=0,\ x^2+x=0,$
$x^2-x+1=0,\ x^2+x+1=0$

4. その他の場合

上述以外の場合を一覧表にして与えよう．

条　　件	求める 2 次方程式
$\alpha+\beta=\alpha^2+\beta^2$	$2x^2-2ax+a^2-a=0$ ここに a は任意の実数
$\alpha+\beta=\alpha^3+\beta^3$	$3x^2-3ax+a^2-1=0$ $(a\neq 0)$，$x^2+a=0$, ただし a は任意の実数
$\alpha+\beta=\alpha^4+\beta^4$	$x^2-ax+b=0$, ただし a, b は $2b^2-4a^2b+a^4-a=0$ を満たす任意の実数
$\alpha^3+\beta^3=\alpha^4+\beta^4$	$x^2-ax+b=0$, ただし a, b は $2b^2+(3a-4a^2)b+(a^4-a^3)$ $=0$ を満たす任意の実数

以上つたない研究であるが，何かのお役に立つことがあれば幸いである．

（文責　仁平政一）