推薦入試問題を使った教材化の試み

土田　秀雄（つちだ　ひでお）

1．はじめに

高校への進学率が90％を越えてからずいぶんとなります．そしてその間，高校現場では色々な問題点がでてきました．もちろんそれぞれの高校では，自校に適した対応策を色々と考えて実行されていることだと思います．更に学習面においても色々な工夫がなされていることだと思います．そのような中から新たな問題としてでてきたのが高校数学の学習内容についての疑問です．つまり，現在のカリキュラム内容の中で高校生にどれだけの内容を教えればよいのかという事です．このような疑問がでてきた背景には，高校への進学率が高率になってきた反面，入学してくる生徒達の学力の幅が相当ひろがってきていて，結果として従来通りの授業方法では理解できない生徒達が増えて，更に従来のペースで授業展開ができない為教科書の内容をすべて教えることができなくなって，内容の精選をせざるをえない状況もでてきているからです．もちろんすべての現場がそうであるとはいいませんが，全国的な現象であると聞いています．

大阪では，生徒数の増加に合わせて学校数も増やしました．つまり新設高校を開校してきました．この新設高校では，上記のような生徒達がかなり入学してきます．もちろん既設校や少々年数のたった学校つまり中堅校にも上記のような生徒達がかなり入学してきます．上記のような生徒達の全部とはいいませんがかなりの数の生徒達は，更に進学を希望しています．しかしその中でも理工系方面を希望する生徒達は数学という大きな壁にぶつかり学習意欲をなくしています．このような生徒達をみると何かしてやりたいと思わずにはいられません．そこで推薦入試という制度に着目したのです．従来，大学入試といえば，一般入試だけが取り上げられていましたが，一般入試という制度に対して，推薦入試という制度もあります．推薦入試の問題は一般入試の問題と比較するとかなり基本的な内容を重視しています．この基本的な内容をどのように生徒達にわかりやすく解説するかという所で色々な方法を考えましたが，ここでは現在教材化した「高校数学の基礎知識」について述べます．

2．教材化の方法

(1)　推薦入試問題の解答の作成（資料１，２）

この解答は，生徒の立場に立っての解答を心がけました．つまり，生徒から見て理解し易いであろうと思われる筋道を選んでいます．したがって，少々回りくどいと思われるような解答もあります．

(2)　項目と基礎事項の作成（資料１，２）

項目とは，ある問題の解答を作成するときの解答のおおまかな手がかりを教えてくれるものと位置づけました．

基礎事項とは，ある問題の解答を作成している途中にでてくる必要な公式類とか計算技術とか考え方の手がかりを教えてくれるものと位置づけました．

項目・基礎事項を前述のような内容のものと位置づけて，作成した解答の横に並記して生徒が解答の筋道を一層理解し易くしました．

(3)　項目と基礎事項の頻出度一欄表の作成（資料３）

１つの問題には項目が１つあり，基礎事項は数個あります．各問題についてこの項目を調べると何回もでてくる項目から１回しかでてこない項目まで頻出回数が異なっています．そこで頻出回数の多い項目順に並べて項目一欄表を作りました．基礎事項についても同じようにして，頻出回数の多い順に並べて基礎事項一欄表を作りました．

このことによって重要度の高い項目及び基礎事項の抽出が簡単になり学習順位を考える時の参考になります．

(4)　基礎事項確認問題の作成（資料４）

１つ１つの基礎事項についてその知識を問う問題を作り，基礎事項一欄表の順序に対応させて並べました．１つの問題は１つの基礎事項の知識だけを問う形式にしてありますので，どの問題ができたかできなかったかによって基礎事項の知識の有無が確認できるようになっています．

(注)　資料１～４は，それぞれ一部分だけの紹介である．

３．教材としての使用方法

「高校数学の基礎知識」の使い方は色々と考えられると思いますが，１つの方法として次のような使用を考えてみました．

。３年生に対して

基礎事項確認問題を何らかの形（テスト方式，自宅学習等）で生徒に与えてその結果できなかった問題の基礎事項を教科書を使って再復習させる．次に推薦問題を生徒に与える．その時与えた問題にかかわる基礎事項をヒントにして示してもよい．

また，自学自習用としてこの小冊子を与えてもよいと考えている．

。１・２年生に対して

教科書を使って授業をする際，基礎事項にかかわる内容の所を生徒達が理解できるように十分時間をとって指導する．このとき基礎事項一欄表から重要度の高い基礎事項には，より多くの時間をかけ確実な定着をはかる．

。教科書の内容を精選する場合

基礎事項一欄表から基礎事項を取り上げ，それを教科書の事項と比較・対応させることによって教科書の内容を精選する場合の参考とする．場合によっては重要度の高い順に教科書内容の教授順を変えることも考えられると思う．

ここでいう教科書の内容を精選する事の意味は，内容の難易から精選することではなく，限られた教授時間を有効に使うために，重要度の高い基礎事項に対応した時間配分を考えて，その結果としての内容の精選という意味である．

４．おわりに

ここでは，推薦入試のそれぞれの問題内容が，大学での学習に必要な基礎知識・基本能力等を有しているか否かを問うものとして考えている．この観点から，大学教育につながるという意味で，高校数学の学習の力点をどこに置くべきかも明らかになると考えている．したがって，教科書内容の精選に対しても意味があると思っている．

尚「高校数学の基礎知識」で取り上げた大学は関西地区の京都産業大学・大阪産業大学・大阪工業大学・大阪電気通信大学・近畿大学・摂南大学である．全国的な規模で調べる事とか，関西地区のように地区だけで調べる事もそれぞれ意味のある事と思っている．

今後は，基礎事項を教科書の章ごとにまとめなおすとか，アイウエオ順にして調べ易くするとかの工夫が必要であると痛感している．

この小冊子「高校数学の基礎知識」は大阪高等学校数学教育会・大学入試検討委員会推薦入試分科会のメンバー　足立光隆（西淀川高），馬越洋一（西寝屋川高），尾﨑聡（茨田高），芝田秀和（四条畷北高），妹尾清則（四条畷北高），藤井一正（砂川高），山田晃（関西大倉高）の共同によって作成されたものです．

尚，この小冊子「高校数学の基礎知識」についての問合せは，大阪府立高槻北高校の土田秀雄に願います．

資料１　62年度の分析から

昭和62年度　大阪電気通信大学　推薦入試

1. (1)　100以下の自然数のうち奇数の総和はいくらか．

【解】　題意の奇数は初項 1，公差 2 の等差数列をなす．

一般項 a_n は　　$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$

最大項は 99 だから　　$99=2n-1$

$n=50$　　　∴ 項数は 50

求める和を S とすると

$$S=\frac{50}{2}\{2\times 1+(50-1)\times 2\}=2500$$

【別解1】　$S=1+3+5+\cdots\cdots+97+99$

$$=\frac{1}{2}\times 50\times(1+99)=2500$$

【別解2】　初項 1，公差 2，一般項 $2n-1$ の数列の第50項までの和を求めればよい．

$$S=\sum_{k=1}^{50}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{50}k-\sum_{k=1}^{50}1$$

$$=2\times\frac{1}{2}\times 50(50+1)-50=2500$$

〈項目〉
数列

≪基礎事項≫
等差数列の一般項
等差数列の和
等差数列の和
Σ の性質

(2)　$x+y=\sqrt{7}$，$x-y=\sqrt{6}$ のとき $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ の値を求めよ．

【解】　$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$$

ここで　$x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{2}$

$$xy=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{2}=\frac{1}{4}$$

よって　　　与式$=\dfrac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{42}+\sqrt{6}}{6}$

〈項目〉
分数式
無理式

≪基礎事項≫
分母の有理化
連立方程式
数値代入
分母の有理化

(3)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$ の値を求めよ．

【解】　与式$=\sin 0+\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{2}{3}\pi+\sin\dfrac{5}{6}\pi+\sin\pi$

$$=0+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+0=2+\sqrt{3}$$

〈項目〉
三角関数

≪基礎事項≫
Σ の性質
三角関数の値

2. (1)　$0.125<x<1$ のとき $\boxed{}<\log_2 x<\boxed{}$ である．

【解】　$\log_2 0.125=\log_2\dfrac{125}{1000}=\log_2\dfrac{1}{8}$

$$=\log_2 2^{-3}=-3$$

また　$\log_2 1=0$　　よって　$-3<\log_2 x<0$

〈項目〉
対数

≪基礎事項≫
対数の性質

資料２　63年度の分析から

昭和63年度　近畿大学　理工学部　推薦入試

1.　２次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の２つの解を α, β とするとき，

(1)　$(5\alpha+\beta)(5\beta+\alpha)=\dfrac{\square\, b^2+\square\, ac}{a^2}$

【解】 解と係数との関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$$(5\alpha+\beta)(5\beta+\alpha)=5\alpha^2+26\alpha\beta+5\beta^2=5\alpha^2+10\alpha\beta+5\beta^2+16\alpha\beta$$

$$=5(\alpha+\beta)^2+16\alpha\beta=5\left(-\frac{b}{a}\right)^2+16\frac{c}{a}=\frac{5b^2+16ac}{a^2}$$

〈項目〉
２次方程式

≪基礎事項≫
解と係数との関係
対称式の基本化

(2)　$\dfrac{1}{5\alpha-1}+\dfrac{1}{5\beta-1}=\dfrac{\square\, a+\square\, b+\square\, c}{a+5b+25c}$

【解】 $$\frac{1}{5\alpha-1}+\frac{1}{5\beta-1}=\frac{5\beta-1+5\alpha-1}{(5\alpha-1)(5\beta-1)}=\frac{5(\alpha+\beta)-2}{25\alpha\beta-5(\alpha+\beta)+1}$$

$$=\frac{-5\dfrac{b}{a}-2}{25\dfrac{c}{a}+5\dfrac{b}{a}+1}=\frac{-2a-5b}{a+5b+25c}$$

〈項目〉
２次方程式

≪基礎事項≫
分数式の計算
対称式の基本化
繁分数

2.　a を実数とする．連立方程式　$\begin{cases} ay-7x+4=0 \\ y+(a-2)x-2=0 \end{cases}$　の解 x, y は，方程式

$2(y+\square x-1)^2+3(\square x-1)^2=5$　を満たす．このことから連立方程式の整数解のうちで，$x>0$, $y>1$ であるものは，$x=\square$, $y=\square$ であり，このとき $a=\square$ である．

【解】 $\begin{cases} ay=7x-4 & \cdots\cdots ① \\ ax=2x-y+2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①×x＝②×y　より

$$x(7x-4)=y(2x-y+2)$$

$$y^2+7x^2-2xy-4x-2y=0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

問題の式を　$2(y+px-1)^2+3(qx-1)^2=5$ とする．

展開すると

$$2y^2+(2p^2+3q^2)x^2+4pxy-(4p+6q)x-4y=0$$

これが③式を２倍したものと等しいから

$$\begin{cases} 2p^2+3q^2=14 \\ 4p=-4 \\ 4p+6q=8 \end{cases}$$

これを解くと　$p=-1$, $q=2$

$\therefore$　$2(y-x-1)^2+3(2x-1)^2=5$

x, y は整数だから　$\begin{cases} y-x-1=\pm 1 \\ 2x-1=\pm 1 \end{cases}$

$x>0$, $y>1$ だから，これを解くと　$x=1$, $y=3$

これを②に代入すると　$a=1$

〈項目〉
整数

≪基礎事項≫
連立方程式
係数比較法
連立方程式
整数の性質
連立方程式

資料３　基礎事項・項目一欄表から

基礎事項

1．連立方程式の解法
2．解と係数との関係
3．２次不等式の解法
4．係数比較法
　微分法
5．面積と定積分
　平方完成
　直線の方程式
6．２次方程式の解法
7．接線の方程式
　微分係数
　除法の原理
8．円の方程式
　判別式
　直線の垂直条件
　式の値
9．２点間の距離
　３次方程式の解法
　定積分法
10．媒介変数表示
　行列の積
　線分の中点
　共有点の座標と連立方程式の解
　関数の極値
11．法線ベクトル
　関数の増減表
　ベクトルの大きさ
　絶対値
　分母の有理化
　三角形の面積
　因数分解
　対称式の基本化
12．数値代入
　連立不等式の解法
　平面の方程式
　２点を通る直線の方程式
　３次不等式の解法
　三平方の定理

項　目

1．定積分
2．微分
3．ベクトル
4．三角関数
5．円
6．三角比
7．関数の最大・最小
　整式
8．２次方程式
　接線
9．複素数
　放物線
　数列
　整数
　直線
　図形の交点
　球面と平面
10．無理式
　平面
　分数式
　行列
　不定積分
　点と直線
　１次変換
　集合
　方程式
　恒等式

(注)
項目 … 問題を解決するためのキーワード
基礎事項 … 問題を解決するために実際に必要とする知識・技能

資料4　基礎事項確認問題から

〈基礎事項　確認問題〉

◦連立方程式

問　次の連立方程式を解け.

(1) $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} ar^2=12 \\ ar^4=48 \end{cases}$

◦解と係数との関係

問　$x^2+2x+5=0$ の解を α, β とするとき, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ の値を求めよ.

◦２次不等式の解法

問　次の不等式を解け.

(1) $2x^2+7x-4>0$　　(2) $3x^2+x-2\leqq 0$

◦係数比較法

問　次の式が恒等式となるように, a, b の値を求めよ.

$2x^2+ax+b=(2x-1)(x+1)$

◦微分法

問　関数 $y=2x^3-x^2+x$ を微分せよ.

◦面積と定積分

問　$y=4x-x^2$ と x 軸とで囲まれた面積を求めよ.

◦平方完成

問　次の式を $a(x-b)^2+c$ の形にせよ.

$2x^2-6x+1$

◦直線の方程式

問　傾きが 3 で点 (2, −1) を通る直線の方程式を求めよ.

◦２次方程式の解法

問　次の２次方程式を解け.

(1) $3x^2-5x-2=0$　　(2) $2x^2-x-2=0$

◦接線の方程式

問　曲線 $y=x^3-2x$ 上の点 (2, 4) における接線の方程式を求めよ.

◦直線の垂直条件

問　２直線 $y=mx-1$, $y=-3x+2$ が直交するとき, mの値を求めよ.

◦式の値

問　$x=\sqrt{2}+1$, $y=\sqrt{2}-1$ のとき, 次の式の値を求めよ.

(1) $x+y$　　(2) xy　　(3) x^3+y^3

◦２点間の距離

問　次の２点 A, B 間の距離を求めよ.

(1) A(−2), B(5)　　(2) A(3, 1), B(6, 5)

◦３次方程式の解法

問　次の方程式を解け.

$x^3+2x^2-x-2=0$

◦定積分法

問　$\int_1^3 (x^2-x+2)\,dx$ を求めよ.

◦媒介変数表示

問　直線 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{2}=z-2$ を媒介変数表示で表せ.

◦行列の積

問　$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき, AB を求めよ.

◦線分の中点

問　A(4, −1), B(2, 5) のとき, 線分 AB の中点を求めよ.

◦共有点の座標と連立方程式の解

問　$y=x-2$ と $x^2+y^2=5$ の交点の座標を求めよ.

◦関数の極値

問　関数 $f(x)=x^3-3x$ の極値を求めよ.

（大阪府立高槻北高等学校）