行列 A と交換可能な行列について

二見　弥（ふたみ　わたる）

「2次の正方行列Aが，$A \neq kE$ であるとき，行列Aと交換可能な行列Bは

$$B=pA+qE$$

と表されることを示せ．ただし，Eは2次の単位行列とする．」

この問題は，行列の指導の中でよく見かける問題である．ある任意の2次正方行列Aが，$A \neq kE$ である限り（$A=kE$ である実数kが存在しないという意味），Aと交換可能な行列の全体は，AとEの1次結合で表される行列全体であることを示している．この証明については，いろいろなところでなされており，簡単にできるのでここでは省略する．

さて，上に掲げた問題は2次の場合であるが，3次以上の正方行列に関しても成立するであろうか．すなわち，数体 K 上のn次正方行列Aが，$k \in$K に対し，$A \neq kE$ であるとき，行列Aと交換可能な行列は　　A^{n-1}，A^{n-2}，……，A，E

の1次結合として表せるであろうか．

行列の指導において，2次行列ではどうしても法則の本質にふれることがなかなか困難である．逆行列の公式においてもそうであるが，2次行列において成立する性質が2次行列固有のものか否かについて十分留意する必要がある．2次行列にとどまる限り，やむをえない面があるが，指導する側の教師としては，2次行列においては表面に現れない法則といったものを十分理解して指導することが望まれる．

さて，上記の一般化した問題に対して，線型代数学におけるジョルダンの定理を利用しての解答を試みた．以下はその小文である．

1．準備として

(定義) 行列A_i（$i=0, 1, 2, \cdots, n-1$)を数体 K 上の正方行列とする．

$$\alpha_i \in \mathrm{K}\ (i=0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

に対して

$$\alpha_{n-1}A_{n-1}+\alpha_{n-2}A_{n-2}+\cdots\cdots+\alpha_1 A_1+\alpha_0 A_0=O$$

であるならば

$$\alpha_{n-1}=\alpha_{n-2}=\cdots\cdots=\alpha_1=\alpha_0=0$$

が成り立つとき，行列

$$A_{n-1},\ A_{n-2},\ \cdots\cdots,\ A_1,\ A_0$$

は1次独立であるということにする．

1次独立でないとき，1次従属であるということにする．

Example

Aを2次正方行列とすると，

A^2，A，E　は1次従属である．

なぜなら，　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　とするとき，

ケーリー・ハミルトンの定理によって，

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

が成り立つからである．

一般のn次正方行列についても，ケーリー・ハミルトンの定理により同様のことが成り立つ．すなわち，『Aをn次正方行列とすると，$m \geqq n$ のとき

$$A^m,\ A^{m-1},\ \cdots\cdots,\ A^2,\ A,\ E$$

は1次従属である．』

(定義) n次正方行列Aにおいて，$A=(\alpha_{ij})$とするとき

$i \leqq j$ のとき　$\alpha_{ij}=\alpha_{i+1\,j+1}$

$i > j$ のとき　$\alpha_{ij}=\alpha_{i+1\,j+1}=0$

を満たす行列Aを上三角シフト行列（単にシフト行列）と呼ぶことにする．(※)

上の定義から明らかなように，シフト行列は下記のような行列であり，n次元数ベクトル空間における元

(※)この名称は，便宜的に私が名付けたもの．

$$(\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots\cdots,\ \mu_n)$$
と1対1に対応する.

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_n \\ & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \vdots \\ & & \mu_1 & \ddots & \\ & O & & \ddots & \mu_2 \\ & & & & \mu_1 \end{pmatrix}$$

定理1

n 次正方行列 $J(\lambda\ \ n)$を

$$J(\lambda\ \ n)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & O \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & O & & & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

とするとき，$J(\lambda\ \ n)$と交換可能な行列は上三角シフト行列である.

(証明)

n についての帰納法で証明する.

$$J(\lambda\ \ 2)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

とする. $J(\lambda\ \ 2)$ と交換可能な行列を B_2 として

$$B_2=\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} \lambda x & x+\lambda y \\ \lambda u & u+\lambda v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x+u & \lambda y+v \\ \lambda u & \lambda v \end{pmatrix}$$

これから　$u=0$, $x=v$ を得る.

よって

$$B_2=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

これはシフト行列であり，$n=2$ のとき成り立つ. 次に，$n\geqq 3$ として，$n-1$ 次正方行列 $J(\lambda\ \ n-1)$ と交換可能な行列 B_{n-1} がシフト行列であると仮定する.

$$B_{n-1}=\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n-1} \\ & \mu_1 & \ddots & \vdots \\ & O & \ddots & \mu_2 \\ & & & \mu_1 \end{pmatrix}$$

とおく.

n 次正方行列 $J(\lambda\ \ n)$ と交換可能な行列を B_n とし

$$B_n=\left(\begin{array}{ccc|c} & B'_{n-1} & & x_1 \\ & & & x_2 \\ & & & \vdots \\ & & & x_{n-1} \\ \hline y_1 & y_2 \cdots & y_{n-1} & z \end{array}\right)$$

とすると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & B'_{n-1} & & x_1 \\ & & & x_2 \\ & & & \vdots \\ & & & x_{n-1} \\ \hline y_1 & y_2 \cdots & y_{n-1} & z \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & O & 0 \\ & \lambda\ \ 1 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \\ O & & 1 & 0 \\ & & \lambda & 1 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & O & 0 \\ & \lambda\ \ 1 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \\ O & & 1 & 0 \\ & & \lambda & 1 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} & B'_{n-1} & & x_1 \\ & & & x_2 \\ & & & \vdots \\ & & & x_{n-1} \\ \hline y_1 & y_2 \cdots & y_{n-1} & z \end{array}\right)$$

において

$$y_1=y_2=\cdots\cdots\cdots=y_{n-1}=0$$

$$B'_{n-1}J(\lambda\ \ n-1)=J(\lambda\ \ n-1)B'_{n-1}$$

が成り立ち，帰納法の仮定より，B'_{n-1} はシフト行列であるから

$$B'_{n-1}=\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n-1} \\ & \mu_1 & & \vdots \\ & & \ddots & \\ & O & & \mu_1 \end{pmatrix}$$

と表せる. したがって，上式は

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n-1} & x_1 \\ & \mu_1 & \mu_2 & \vdots & x_2 \\ & & \mu_1 & \ddots & \vdots \\ & O & & \ddots & \\ & & & \mu_1 & x_{n-1} \\ \hline 0 & & \cdots & 0 & z \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & O & 0 \\ & \lambda\ \ 1 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \\ O & & 1 & 0 \\ & & \lambda & 1 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & O & 0 \\ & \lambda\ \ 1 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \\ O & & 1 & 0 \\ & & \lambda & 1 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc|c} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n-1} & x_1 \\ & \mu_1 & \mu_2 & \vdots & x_2 \\ & & \mu_1 & \ddots & \vdots \\ & O & & \ddots & \\ & & & \mu_1 & x_{n-1} \\ \hline 0 & & \cdots & 0 & z \end{array}\right)$$

より

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & \mu_{n-1}+\lambda x_1 \\ & * & & \mu_{n-2}+\lambda x_2 \\ & & & \vdots \\ & & & \mu_1+\lambda x_{n-1} \\ \hline 0 & \cdots\cdots & 0 & \lambda z \end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c} & & & \lambda x_1+x_2 \\ & * & & \lambda x_2+x_3 \\ & & & \vdots \\ & & & \lambda x_{n-1}+z \\ \hline 0 & \cdots\cdots & 0 & \lambda z \end{array}\right)$$

これから

$$\mu_{n-1}=x_2,\quad \mu_{n-2}=x_3,\quad \cdots\cdots,\quad \mu_2=x_{n-1},\quad \mu_1=z$$

x_1 は任意

を得る.

よって，$x_1=\mu_n$ とおけば

$$B_n=\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ & \mu_1 & \mu_2 & \vdots \\ & & \mu_1 \ddots & \\ & O & \ddots & \mu_2 \\ & & & \mu_1 \end{pmatrix}$$

となる．ゆえに，B_n はシフト行列となる．

よって，定理1は証明された．

定理2

2つの n 次正方行列 U，V がシフト行列であるとき，これらの積 UV もまたシフト行列である．

(証明)

$$U=\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ & \mu_1 & \mu_2 & \vdots \\ & & \ddots & \ddots \\ & O & & \mu_2 \\ & & & \mu_1 \end{pmatrix}$$

$$V=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \\ & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \vdots \\ & & \ddots & \ddots \\ & O & & \varepsilon_2 \\ & & & \varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，$UV=(a_{ij})$ とすると

$i\leqq j$ のとき

$$a_{ij}=(\underbrace{0\cdots\cdots0}_{i-1\,ヶ}\ \vdots\ \mu_1\quad \mu_2\cdots\cdots\mu_{n-i+1})\begin{pmatrix} \varepsilon_j \\ \vdots \\ \varepsilon_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \}\,n-j\,ヶ \\ \\ \end{matrix}$$

$$=\mu_1\varepsilon_{j-i+1}+\mu_2\varepsilon_{j-i}+\cdots\cdots+\mu_{j-i+1}\varepsilon_1$$

また

$$a_{i+1\,j+1}=(\underbrace{0\cdots\cdots0}_{i\,ヶ}\ \vdots\ \mu_1\quad \mu_2\cdots\cdots\mu_{n-i})\begin{pmatrix} \varepsilon_{j+1} \\ \varepsilon_j \\ \vdots \\ \varepsilon_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \}\,n-j \\ -1\,ヶ \\ \\ \end{matrix}$$

$$=\mu_1\varepsilon_{j-i+1}+\mu_2\varepsilon_{j-i}+\cdots\cdots+\mu_{j-i+1}\varepsilon_1$$

より　$a_{ij}=a_{i+1\,j+1}$

$i>j$ のときは，$j-i+1\leqq0$　であるから

$$a_{ij}=a_{i+1\,j+1}=0$$

ゆえに，UV はシフト行列である．

(証明終)

上の証明において

$$a_{11}=(\mu_1\quad \mu_2\cdots\cdots\mu_n)\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\mu_1\varepsilon_1$$

より，UV の対角成分は $\mu_1\varepsilon_1$ であることが分かる．

また，この定理から次の系が得られる．

系1． n 次正方行列 S がシフト行列であるとき，S^k もまたシフト行列である．

定理3

異なる固有値 λ_i $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k)$ に対し，行列

$$J_{\lambda_i}=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & O \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & O & & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

と交換可能な行列を S_i とすると

$$J=J_{\lambda_1}\dotplus J_{\lambda_2}\dotplus\cdots\cdots\cdots\dotplus J_{\lambda_k}$$

と交換可能な行列 B は

$$B=S_1\dotplus S_2\dotplus\cdots\cdots\cdots\dotplus S_k$$

である．

(証明)

行列 B_{lm} を $n_l\times n_m$ 型の行列として

$$B=(B_{lm})\qquad l=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k$$
$$\qquad\qquad\qquad m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k$$

とすると，$JB=BJ$　より

$$J_{\lambda_l}B_{lm}=B_{lm}J_{\lambda_m}$$

である．

$l=m$ のときは，仮定から，$B_{ll}=S_l$ である．

$l\neq m$ のとき

$$J_{\lambda_l}B_{lm}=(\alpha_{ij}),\quad B_{lm}J_{\lambda_m}=(\beta_{ij})$$
$$(1\leqq l,\ m\leqq k)$$
$$B_{lm}=(b_{ij})\quad(1\leqq i\leqq n_l,\ 1\leqq j\leqq n_m)$$

とおくと

$$i\neq n_l \text{ のとき}\quad \alpha_{ij}=\lambda_l b_{ij}+b_{i+1j} \qquad ①$$
$$i=n_l \text{ のとき}\quad \alpha_{ij}=\lambda_l b_{ij} \qquad ②$$

である．

また，$j\neq 1$ のとき　$\beta_{ij}=\lambda_m b_{ij}+b_{i\,j-1}$　③

$j=1$ のとき　$\beta_{ij}=\lambda_m b_{ij}$　④

である．$\alpha_{ij}=\beta_{ij}$ より，② と ④ から　$b_{n_l1}=0$

さらに，これと ①，③ から

$$\left.\begin{aligned} b_{11}=b_{21}=\cdots\cdots\cdots\cdots=b_{n_l1}=0 \\ b_{n_l1}=b_{n_l2}=\cdots\cdots\cdots=b_{n_l n_m}=0 \end{aligned}\right\} \qquad ⑤$$

を得る．

また，$n_l-1\geqq i\geqq 1,\quad n_m\geqq j\geqq 2$ のとき

$\lambda_l b_{ij}+b_{i+1j}=\lambda_m b_{ij}+b_{ij-1}$ より

$$b_{ij}=\frac{b_{ij-1}-b_{i+1j}}{\lambda_l-\lambda_m} \qquad ⑥$$

であり，これと ⑤ から　$b_{ij}=0$　を得る．

したがって　$B_{lm}=O$　となる．

よって　$B=S_1\dot{+}S_2\dot{+}\cdots\cdots\cdots\dot{+}S_k$

である．すなわち

$$B=\left(\begin{array}{c|c|c|c} S_1 & & & O \\ \hline & S_2 & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline O & & & S_k \end{array}\right)$$

である．

（証明終）

定理 4

n 次正方行列Aのジョルダン行列Jが，行列Aの異なる固有値 λ_1，λ_2，……，λ_k に対して

$$J=J(\lambda_1\ \ p_1)\dot{+}J(\lambda_2\ \ p_2)\dot{+}\cdots\cdots\dot{+}J(\lambda_k\ \ p_k)$$
$$(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k=n)$$

と表されるとき，行列Aの最小多項式 $\varphi_A(x)$ は

$$\varphi_A(x)=(x-\lambda_1)^{p_1}(x-\lambda_2)^{p_2}\cdots\cdots(x-\lambda_k)^{p_k}$$

である．

この定理の証明は，線型代数学の書物に述べられているので省略するが，Aの１つの固有値 λ_i に対するジョルダン細胞が，次数 p_i のもの１つだけであることから得られる．

2．本題の証明

以上の準備のもとで次の定理を証明する．

定理 5

n 次正方行列Aの異なる固有値を

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\cdots\cdots,\ \lambda_k$$

とする．行列Aのジョルダン行列Jがちょうどk個のジョルダン細胞

$$J(\lambda_i\ \ p_i)\quad(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k)$$

によって

$$J=J(\lambda_1\ \ p_1)\dot{+}J(\lambda_2\ \ p_2)\dot{+}\cdots\cdots\dot{+}J(\lambda_k\ \ p_k)$$
$$(p_1+p_2+\cdots\cdots\cdots+p_k=n)$$

と表されるときに限り，行列Aと交換可能な行列Bは，n個の１次独立な行列

$$A^{n-1},\ A^{n-2},\ \cdots\cdots,\ A,\ E$$

の１次結合として表される．

（証明）

仮定から，行列Aに対して正則行列Pが存在して

$$P^{-1}AP=J$$

と表される．また，各ジョルダン細胞$J(\lambda_i\ \ p_i)$ はシフト行列であるから，$J(\lambda_i\ \ p_i)$ と交換可能な行列をB_i とすると，定理１により，これらもシフト行列である．

さらに，J と交換可能な行列を B' とすると定理３により，B' はシフト行列

$$B_1,\ B_2,\ \cdots\cdots\cdots,\ B_k$$

の直和として表せる．すなわち

$$B'=\left(\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & & & O \\ \hline & B_2 & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline O & & & B_k \end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} \mu_1 & \cdots & \mu_{p_1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mu_1 \end{matrix} & & & \\ \hline & \begin{matrix} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_{p_2} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \varepsilon_1 \end{matrix} & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & \begin{matrix} \delta_1 & \cdots & \delta_{p_k} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \delta_1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

と表せる．

また，定理 4 により，Aの最小多項式 $\varphi_A(x)$ は

$$\varphi_A(x)=(x-\lambda_1)^{p_1}(x-\lambda_2)^{p_2}\cdots\cdots(x-\lambda_k)^{p_k}$$

となる．さらに，AとJは相似であるから

$$\varphi_A(x)=\varphi_J(x)$$

である．これから，n個の行列

$$J^{n-1},\ J^{n-2},\ \cdots\cdots,\ J,\ E$$

は1次独立であるといえる．

なぜなら，これらが1次従属であるとすると，ことごとくは 0 でない

$$\alpha_{n-1},\ \alpha_{n-2},\ \cdots\cdots,\ \alpha_1,\ \alpha_0$$

が存在して

$$\alpha_{n-1}J^{n-1}+\alpha_{n-2}J^{n-2}+\cdots\cdots+\alpha_1 J+\alpha_0 E=O$$

が成立する．ところがこれはxについてのn次式 $\varphi_J(x)$ がJの最小多項式であることに反するからである．

また，定理 2 の系により，ジョルダン細胞の累乗はシフト行列であるから行列

$$J^{n-1},\ J^{n-2},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ J$$

はすべて，行列

$$B_1,\ B_2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ B_k$$

と同じ型のシフト行列の直和として表される．

すなわち

$$J=\begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & & O \\ & J_{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J_{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

のとき

$$J^m=\begin{pmatrix} {J_{\lambda_1}}^m & & & O \\ & {J_{\lambda_2}}^m & & \\ & & \ddots & \\ O & & & {J_{\lambda_k}}^m \end{pmatrix}$$

${J_{\lambda_i}}^m$ は $p_i\times p_i$ 型行列

である．

いま，シフト行列 $B_1,\ B_2,\ \cdots\cdots,\ B_k$ の成分のうち，斜めの層から1つずつ成分をとって，ベクトルxを

$$x=(\mu_1\ \ \mu_2\ \ \cdots\ \ \mu_{p_1}\ \varepsilon_1\ \ \cdots\ \ \varepsilon_{p_2}\ \cdots\ \delta_1\ \cdots\ \delta_{p_k})$$

とすると，xはn次元ベクトル空間の元である．

同様に，$J^{n-1},\ J^{n-2},\ \cdots\cdots\ J,\ E$ のそれぞれに対しても行列の各ブロックごとに斜めの層から1つずつ成分をとって，ベクトル

$$a_{n-1},\ a_{n-2},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ a_1,\ a_0$$

をつくると，これらはすべてn項数ベクトルであり

$$a_{n-1}=({\lambda_1}^{n-1}*\cdots*{\lambda_2}^{n-1}*\cdots*\cdots{\lambda_k}^{n-1}*\cdots*)$$

$$a_{n-2}=({\lambda_1}^{n-2}*\cdots*{\lambda_2}^{n-2}*\cdots*\cdots{\lambda_k}^{n-2}*\cdots*)$$

$$\vdots$$

$$a_1=(\lambda_1,1*\cdots*\lambda_2 1*\cdots*\cdots\lambda_k,1*\cdots*)$$

$$a_0=(1,0\cdots\cdots 0\,1\,0\cdots\quad\cdots 1,0\cdots\cdots\cdots 0)$$

このとき，$J^{n-1},\ J^{n-2},\ \cdots\cdots\cdots,\ J,\ E$ が1次独立であることから，n次元ベクトル空間におけるn個のベクトル $a_{n-1},\ a_{n-2},\ \cdots\cdots\cdots,\ a_1,\ a_0$ が1次独立であることがいえて，ベクトルxはこれらの1次結合で表せる．すなわち，行列 B' は行列

$$J^{n-1},\ J^{n-2},\ \cdots\cdots\cdots,\ J,\ E$$

の1次結合として表される．よって

$$B'=\beta_{n-1}J^{n-1}+\beta_{n-2}J^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+\beta_1 J+\beta_0 E$$

とおくと

$$\begin{aligned} B&=PB'P^{-1}\\ &=\beta_{n-1}A^{n-1}+\beta_{n-2}A^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+\beta_1 A+\beta_0 E \end{aligned}$$

ゆえに，Bは $A^{n-1},\ A^{n-2},\ \cdots\cdots\cdots,\ A,\ E$ の1次結合で表すことができる．

次に，行列Aのジョルダン細胞のうちで，固有値 λ_i に対するものが複数個あるときは，最も次数の高いものを p_i' とすると，行列Aの最小多項式 $\varphi_A(x)$ は

$$\varphi_A(x)=(x-\lambda_1)^{p_1'}(x-\lambda_2)^{p_2'}\cdots\cdots(x-\lambda_m)^{p_k'}$$

$$(p_1'+p_2'+\cdots\cdots+p_k'<n)$$

となる．$\varphi_A(x)$ の次数をrとすると，$r<n$ であるから，n個の行列

$$J^{n-1},\ J^{n-2},\ \cdots\cdots\cdots,\ J,\ E$$

は1次従属となる．さらに，行列 B' において，$l\neq m$ に対する行列 B_{lm} のうちに零行列でないものが存在し，行列 B' をベクトル空間とみたときの次元はnを越える．したがって，行列 B' を行列

$$J^{n-1},\ J^{n-2},\ \cdots\cdots\cdots,\ J,\ E$$

の1次結合で表すことは不可能である．

ゆえに，行列Bは行列

$$A^{n-1},\ A^{n-2},\ \cdots\cdots\cdots,\ A,\ E$$

の1次結合で表すことはできない．

（証明終）

（神奈川県立厚木高等学校）