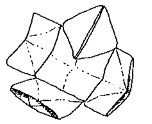
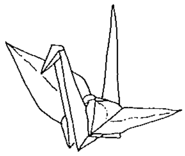
折り紙と数学

— 紙を平たく折りたたむ —





川崎（かわさき） 敏和（としかず）

次の行列の積を計算してみて下さい．

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

単位行列になりましたか．たまたま単位行列になったのではありません．実は，等式

$$(1)\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

は，折り紙と深い関係があります．というより，折り紙そのものです．なぜこの等式が折り紙なのか，お話ししましょう．

まず，4つの行列を1つずつ見ていきます．

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

とおきます．行列Aが表す1次変換はx軸に関する対称移動です．残る行列B，C，Dはそれぞれ，直線$y=-x$，直線$y=x$，y軸，に関する対称移動を表します．どれも(線)対称移動を表す行列です．

平面上の任意の点Pに対して，等式(1)の両辺の作用を考えてみましょう．左辺をみると，まず行列Dにより，点Pはy軸に関し対称な点P′に移ります．引き続き，

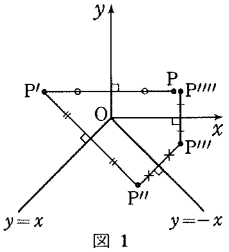


図 1

行列C，B，Aの作用で，点P″，P‴，P⁗へと移動します(図1)．ところが，右辺の作用を考えると，点Pは全く動きません．つまり，

$$(2)\qquad \mathrm{P}=\mathrm{P}''''$$

です．このようにして，等式(1)の図形的な解釈(2)を得ます．(2)は，折り紙を利用して，次のように導くこともできます．

まず，紙に直線lとl上にない点Qを描き，直線lで半分に折りたたんで下さい．次に，点Qに針で穴をあけ，紙をひろげて下さい．直線lに関して点Qと対称な位置にも穴があいていることが分かります(図2)．このように，線対称を表す行列を作用させることは，その対称軸で折ることに相等します．

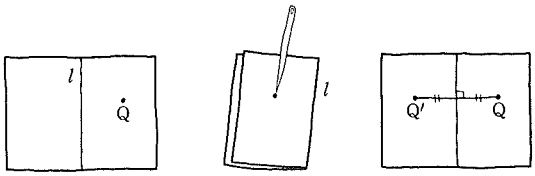


図 2

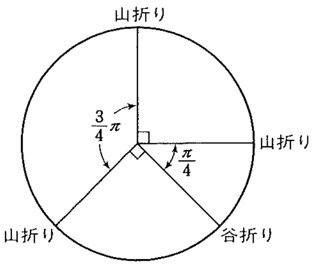


図 3

そこで，図3のような丸い紙を折ってみましょう．x軸，y軸，直線$y=x$を山折り，直線$y=-x$を谷折りします．ここで，図4(1)のように，折り目を山の稜線のように折るとき，山折りといいます．逆に図4(2)のように，谷のように折るとき，谷折りといいます．以下，普通の折り紙の本に倣って，山折り線は1点鎖線で，谷折り線は破線で表すことにし

ます．折りたたんでから，点Pに針で穴をあけて下さい(図5)．ひろげると，各直線に関して対称な位

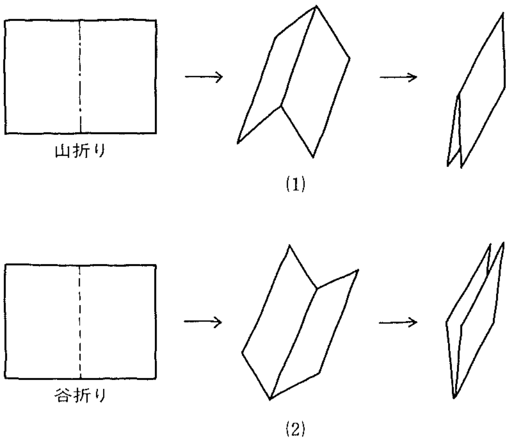


図 4

置に穴があいています．

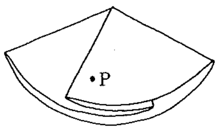


図 5

行列の積は1次変換を続けて行うことに対応するので，図6のように穴を順にたどっていくことは，4つの行列の作用を追うことと同じです．穴はぐるっと1周して元に戻っているので，(2)が成立します．この結果から，4つの行列の積は自明な作用をしていることが分かり，計算しなくても等式(1)が得られます．ここで，重要なことは，「4つの行列が表す対称移動の対称軸を折り目とする折り紙が平坦に折りたためることと，等式(1)が成り立つことが同じ．」ということです．

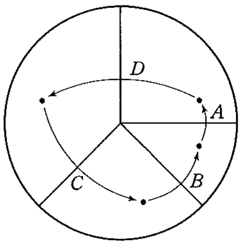


図 6

対称移動を表す行列はたくさんありますが，それら4つの行列の積がいつでも単位行列になる訳ではありません．これを折り紙で表すと，かってな4本の半直線を折り線として紙を折っても，平坦に折りたためる訳ではないということです．そこで，次のような問題が考えられます．

問題1　1点から延びる4つの半直線に対し，これらの半直線に関する対称移動を表す4つの行列の積が単位行列になる必要十分条件を求めよ．

問題2　行列の数が4つ以外では，問題1はどうなるか．

問題1は「1点から延びた4本の半直線を折り目として紙が平坦に折りたためる必要十分条件を求めよ」，問題2は「折り線の数が4本以外の場合はどうか」ということです．

まず，問題1を行列の計算だけで考えましょう．

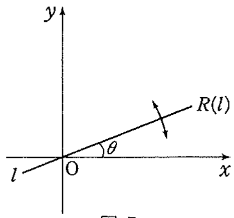


図 7

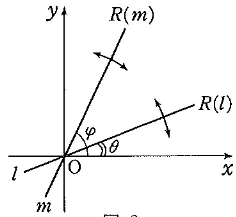


図 8

図7のような，対称移動を表す行列 $R(l)$ は $-\theta$ 回転，x 軸に関する対称移動と θ 回転の合成ですから

$$R(l)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}$$

になります．さらに，2つの対称移動(図8)の合成は，行列の積

$$\begin{pmatrix}\cos 2\varphi & \sin 2\varphi\\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}$$

で計算でき

$$\begin{pmatrix}\cos 2(\varphi-\theta) & -\sin 2(\varphi-\theta)\\ \sin 2(\varphi-\theta) & \cos 2(\varphi-\theta)\end{pmatrix}$$

となります．この行列は2直線 l，m のなす角度 $\varphi-\theta$ の2倍の回転を表しています．そこで，図9のような4直線に関する対称移動を表す行列の積は，2つの回転の積

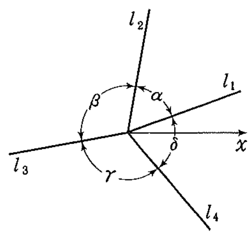


図 9

$$\begin{pmatrix}\cos 2\gamma & -\sin 2\gamma\\ \sin 2\gamma & \cos 2\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos 2(\gamma+\alpha) & -\sin 2(\gamma+\alpha)\\ \sin 2(\gamma+\alpha) & \cos 2(\gamma+\alpha)\end{pmatrix}$$

となります．これが単位行列になるための必要十分条件は

$$\begin{cases}\cos 2(\gamma+\alpha)=1\\ \sin 2(\gamma+\alpha)=0\end{cases}$$

です．$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$ と組み合わせて解くと

(3) $$\alpha+\gamma=\beta+\delta=\pi$$

を得ます．意外に簡単な結果ですね．この結果を折り紙の問題として直接考えるとどうなるでしょう．

図 10 のように，中心 I 半径 1 の円形の紙に I から

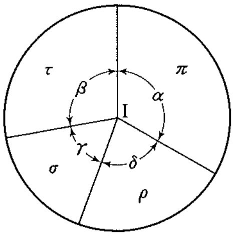


図 10

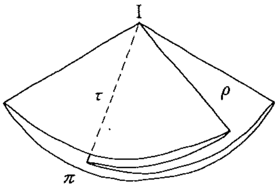


図 11

延びる 4 つの半直線を引きます．この半直線に折り目をつけて，紙を折ったとき，平坦に折りたためるならば，折りたたんだ形は図 11 のような扇形になります．この扇形の弧を細く切取ってまっすぐ伸ばすと，図 12 のような折れ線になります．半径が 1 なの

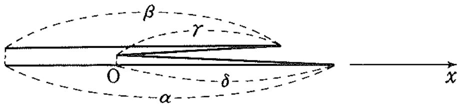


図 12

で，この折れ線の長さは対応する扇形の中心角に等しくなります．座標軸にこの折れ線を伸ばして重ね，原点 O を出発点として折れ線上で点 P を動かすと，折れ線が折れ曲がる度に点 P の動く向きが変わり，折れ線上をぐるっと 1 周して出発点 O に戻ります．このとき，点 P の座標は

$$\delta-\alpha+\beta-\gamma$$

ですが，これは原点 O の座標でもあるから，等式

(4) $$\alpha-\beta+\gamma-\delta=0$$

を得ます．これは等式 (3) と同じものです．

逆に，等式 (3) を満たすように折り目をつけた紙は必ず平坦に折りたためるでしょうか．

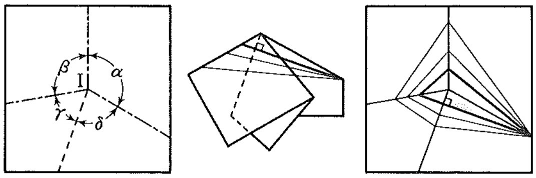
この答えは，伏見 [5] の中に書いてあります．[5] には，平坦に折りたためる条件が，三角形の内心を用いて，分かりやすく解説してあります．定理としてまとめ，紹介しましょう．

折り紙の基本定理(伏見 [5]) 図 13 (1) のような 4 本の折り線に沿って紙を折ったとき，平坦に折りたためるための必要十分条件は，次の条件が成り立つことである．

(3) $\alpha+\gamma=\beta+\delta=\pi$

(5) 山折り線と谷折り線の数の差は 2

(6) 最小の角を挟む折り線の山谷は異なる． 最小の角が 2 つ以上ある場合には，そのうちの 1 つの角に対して，山谷が異なる．



(1) (2) (3)

図 13

定理を証明しましょう．点 I から延びた 4 本の半直線に折り目を付けて，紙が平坦に折りたためたとします．折りたたんだ紙を，谷折り線に垂直に切ってからひろげて下さい．切り口の線は全て，谷折り線に垂直なので，図 13 (3) のような三角形ができます． 3 つの山折り線は三角形の 3 つの頂角の二等分線なので，点 I は三角形の内心です．したがって，この三角形は図 14 のような 3 組の合同な直角三角

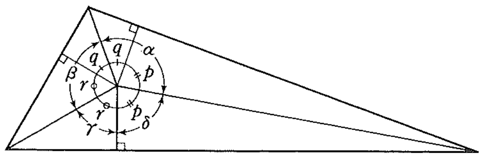


図 14

形に分けられ，内心 I の周りの角の大きさは

$$\begin{cases}\alpha=p+q\\ \beta=q+r\\ \gamma=r\\ \delta=p\end{cases}$$

となります．よって

$$\alpha+\gamma=p+q+r=\beta+\delta$$

となり

$$\alpha+\gamma+\beta+\delta=2\pi$$

と組み合わせると，等式

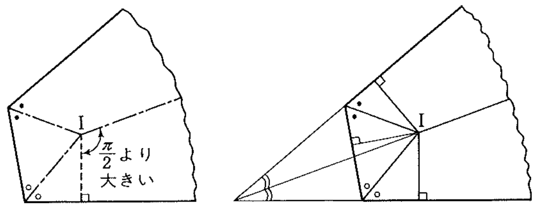
(3) $$\alpha+\gamma=\beta+\delta=\pi$$

を得ます．

条件 (3) の必要性が証明されました．ただし，谷折り線を挟む 2 つの角のうち一方が $\frac{\pi}{2}$ より大きい場合には，谷折り線に垂直に切ってひろげた図形は三角形にはなりません(図 15 (1))．しかし，点 I は 3 辺を延長して出来る三角形の傍心になっていて，内心の場合と同じように，合同な三角形を考えることにより，等式 (3) を証明することが出来ます(図 15 (2))．

また，$\dfrac{\pi}{2}$ の場合も，同様に証明できます．

条件(5)，(6)が平坦に折りたためるための必要条件であることを証明する前に，折りたためない場合を調べてみましょう．図16のような折り線に従って



(1) 図 15 (2)

折りたたんでみて下さい．折り線のなす4つの角度は，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{4}\pi$ ですから，条件(3)は満たしています．ところが，どんなにがんばっても平坦に折りたためません．どこに原因があるのでしょうか．図17のような2種類の折り紙を折ると原因がはっきり分かります．原因は紙の不透過性です．つまり，数学で理論的に取り扱うユークリッド平面と紙は違うのです．ですから，条件(5)，(6)の必要性を証明するとき，行列の計算をいくらやっても無駄です．実際，対称移動を表す行列は，折り目で谷折りしたのか，山折りしたのか区別していません．当然，折り線の山谷の問題に関して役に立ちません．そういう訳で，伏見[5]でも，厳密な数学的証明と言うより，物理的な説明がしてあります．

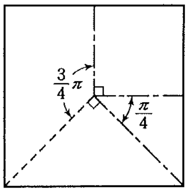


図 16

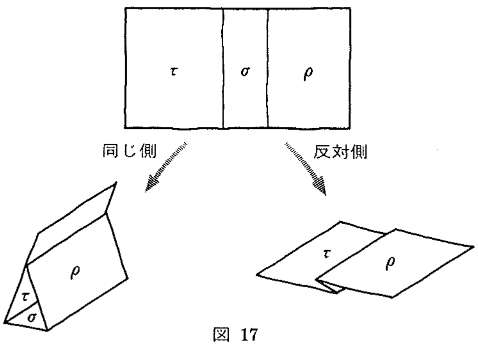


図 17

先の図10を折って条件(5)，(6)の必要性を説明しましょう．最も小さい中心角を挟む2つの折り線は，両隣の面 τ と ρ がぶつからないように，山谷を逆にしなければなりません．また，平坦に折り重なった3つの面 σ，τ，ρ に，残る面 π を重ねる方法は2通りしかありません．上から重ねるか，下から重ねるかです．図18のように上から重ねる場合は，残る2つの折り線は谷折りで，下からの場合は，山

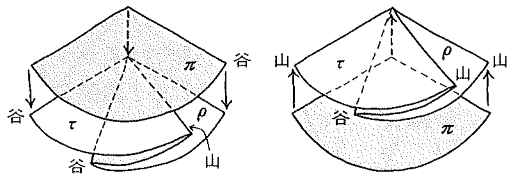


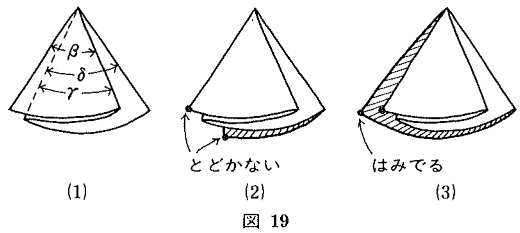
図 18

注意：平坦に折りたたんだ紙をひろげたときについている折り目は，紙を裏から見ると，山谷が逆になるので，山折りだったところを谷折りし，谷折りだったところを山折りしても，平坦に折りたためます．

次に，十分性を説明しましょう．説明が簡単になるように，円形の紙に引いた折り線のなす角度を，図10のように，

$$\gamma<\delta<\beta<\alpha$$

とします．まず，4つの扇形を切り離します．条件(5)，(6)により，γ を挟む折り線の山谷は異なるので，中心角 β，γ，δ の3つの扇形を，図19(1)のように重ねてつなぐことができます．これに中心角 α の扇形をつなぐとき，図19(2)，(3)のように，とどかなかったり，はみでたりしないことが，条件(3)により保障されます．このようにして，図10を平坦に折りたたんだものができます．4つの角 α，β，γ，δ に等しいものがある場合でも，同様に考えることができます．



(1) (2) (3)

図 19

問題1の答えを通り過ぎ，もっと込み入った山谷の問題まで首を突っ込んでしまいました．話しを元に戻して，問題2を考えましょう．問題1は3通りの方法で考えました．

1. 対称移動を表す行列の積を実際に計算する．
2. 丸い紙を折って，その弧の長さを調べる．
3. 三角形の内心の性質を利用する(伏見[5])．

問題2の答えは，2番目の方法で簡単に得られます．座標軸に重ねた折れ線(図12)は折れ曲がるたびに向きを変えるので，偶数回折れ曲がることが必要です．したがって，6本以上の場合を考えれば良いのです．ところが，4本が6本に増えても，折れ線の折れ曲がる回数が増えて，等式

(4)　$\alpha-\beta+\gamma-\delta=0$

の左辺の項数が増えるだけです．つまり，

$\alpha-\beta+\gamma-\delta+\varepsilon-\varphi=0$

となります(図20)．結局，等式

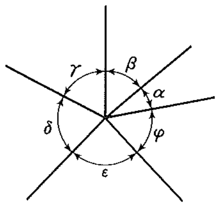


図 20

(6)　$\alpha+\gamma+\varepsilon=\beta+\delta+\varphi=\pi$

が，折り線6本の場合の問題2の答えです．行列(折り線)の数が 8，10，12，…… と増えても同じことです．

今回は，「線対称を表す行列の積が単位行列になること」と「折り紙が平坦に折りたためること」が本質的には同じであることを説明し，折り紙が平坦に折りたためるための条件を考察しました．しかし，折り紙の基本定理の説明で述べたように，山折り線や谷折り線の取り扱いは，あまり数学的ではありませんでした．それは，山折り線や谷折り線がきちんと数学的に定義されていなかったからです．よくよく考えてみると，「折り紙の定義」は何だったのでしょう．

もちろん，きちんと数学的に折り紙を取り扱うことができますが，本稿ではそこまでお話しできませんでした．機会があれば，「折り紙をどのように定義するか」，「もっと複雑な折り紙はどう取り扱えばよいか」をお話しすることにしましょう．

おまけ：図21を見て下さい．これは，藤本[4]の「平織り」という繰り返し模様の折り紙の折り線図です．糸岐[1]のソフトを使って描いてみました．折り線の頂点はどれも図3のようになっています．これを折って光にかざすと，シルエットがとてもきれいです．腕に自信のある方は，条件(5)(6)を満たすように山谷を付けて折ってみて下さい．

おまけのおまけ：図21は，関数の式と描かせたい x，y の範囲をパソコンに入力して描いたものですが，その方程式はたった1つです．図の中に方程式が表示されていますが，BASIC の記号で書かれていますので，普通の形で書いておきます．興味のある方は分析してみて下さい．

$f(x,\ y)f(x+1,\ y-3)f(x-1,\ y+3)f(y,\ -x)$
$\times f(y+1,\ -x-3)f(y-1,\ -x+3)=0$

ただし，$f(x,\ y)=((-[x/3]+x+2)/2+|3[x/3]-x+2|/2-y-1)((-[-x/3]-x+2)/2+|3[-x/3]+x+2|/2+y-1)$ です．[　] はガウス記号です．

参考文献

[1] 糸岐宣昭，「パソコンで見る関数グラフィクス」，森北出版(1988).

[2] 堀井洋子，「折り紙と数学」，明治図書(1977).

[3] 藤本修三，「創造性を開発する立体折り紙」，新写植出版(1976).

[4] 藤本修三，西脇正巳，「創造する折り紙遊びへの招待」，朝日カルチャーセンター(1982).

[5] 伏見康治，伏見満枝，「折り紙の幾何学」，日本評論社(1979).

(佐世保工業高等専門学校)

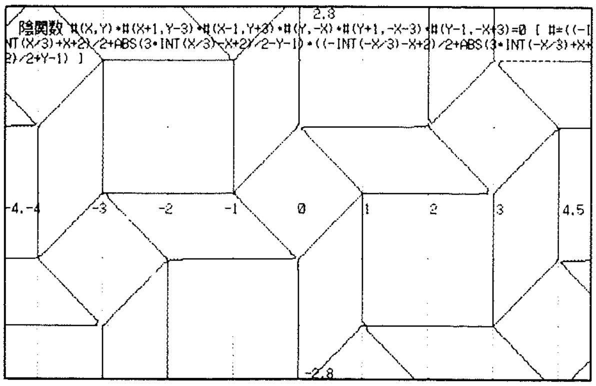


図 21