Series ～ 指導の具体例

河村の方法について

河村(かわむら)　嘉生(よしお)

は じ め に

行列の対角化は，プロセスそのものが大変興味深いものであり，大学入試においてもそこが出題されてきたようである．しかし，入試全体を見ると行列以外の分野であっても，行列を用いることによってすっきりと解くことができる問題も少なくない．しかし，そこにはどうしても行列の累乗の計算が必要になってくる．そこで累乗をアルゴリズミックに求める方法を考えてみた．この方法は，生徒に理論的な裏付けを指導し定着させることもおもしろいことであるが，それで終わるのでなく，種々の問題に利用できるように指導している．

なお，この方法の一般化にあたっては，恩師・小邑政明先生（岐阜北高教諭），親友・竹内聖彦氏の指導・助言をいただきました．ここに厚くお礼申し上げます．

A	……………	n 次正方行列
$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$	……………	A の固有値（ただし，重複しない）
$S_i(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$	……………	$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ に関する i 次基本対称式
$S_i(j)$	……………	$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \cdots, \lambda_n$ に関する i 次基本対称式 即ち，$S_i(j)=S_i(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{j-1}, 0, \lambda_{j+1}, \cdots, \lambda_n)$

〈命題〉…河村の方法

$$P=A^{n-1}-A^{n-2}\begin{pmatrix} S_1(1) & & \\ & \ddots & \\ & & S_1(n) \end{pmatrix}+A^{n-3}\begin{pmatrix} S_2(1) & & \\ & \ddots & \\ & & S_2(n) \end{pmatrix}-\cdots+(-1)^{n-1}\begin{pmatrix} S_{n-1}(1) & & \\ & \ddots & \\ & & S_{n-1}(n) \end{pmatrix}$$ とすると，

(i) $AP=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ となる．

λ_1，λ_2，……，λ_n の順序をうまく選ぶと，P は正則となり

(ii) $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ と対角化できる．

証明

(i) $AP-P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}=A^n-A^{n-1}\begin{pmatrix} S_1(1) & & \\ & \ddots & \\ & & S_1(n) \end{pmatrix}+A^{n-2}\begin{pmatrix} S_2(1) & & \\ & \ddots & \\ & & S_2(n) \end{pmatrix}-\cdots\cdots$

$$+(-1)^{n-1}A\begin{pmatrix} S_{n-1}(1) & & \\ & \ddots & \\ & & S_{n-1}(n)\end{pmatrix}-A^{n-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}+A^{n-2}\begin{pmatrix} S_1(1) & & \\ & \ddots & \\ & & S_1(n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$-A^{n-3}\begin{pmatrix} S_2(1) & & \\ & \ddots & \\ & & S_2(n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}+\cdots\cdots-(-1)^{n-1}\begin{pmatrix} S_{n-1}(1) & & \\ & \ddots & \\ & & S_{n-1}(n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$=A^n-A^{n-1}\begin{pmatrix} S_1(1)+\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_1(n)+\lambda_n\end{pmatrix}+A^{n-2}\begin{pmatrix} S_2(1)+\lambda_1 S_1(1) & & \\ & \ddots & \\ & & S_2(n)+\lambda_n S_1(n)\end{pmatrix}-\cdots\cdots$$

$$+(-1)^k A^{n-k}\begin{pmatrix} S_k(1)+\lambda_1 S_{k-1}(1) & & \\ & \ddots & \\ & & S_k(n)+\lambda_n S_{k-1}(n)\end{pmatrix}-\cdots\cdots+(-1)^n\begin{pmatrix} \lambda_1 S_{n-1}(1) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n S_{n-1}(n)\end{pmatrix}$$

$$=A^n-A^{n-1}\begin{pmatrix} S_1(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) & & \\ & \ddots & \\ & & S_1(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\end{pmatrix}+A^{n-2}\begin{pmatrix} S_2(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) & & \\ & \ddots & \\ & & S_2(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\end{pmatrix}-\cdots\cdots$$

$$+(-1)^k A^{n-k}\begin{pmatrix} S_k(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) & & \\ & \ddots & \\ & & S_k(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\end{pmatrix}-\cdots\cdots+(-1)^n\begin{pmatrix} S_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) & & \\ & \ddots & \\ & & S_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\end{pmatrix}$$

$=O$ 　($\because$ Caylay-Hamilton)

(ii) ① $n=2$ のとき $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ とすると $P=\begin{pmatrix} a-\lambda_2 & b \\ c & d-\lambda_1\end{pmatrix}$

$\det P=(a-\lambda_2)(d-\lambda_1)-bc=f(\lambda_1,\ \lambda_2)$ とする.

$f(x,\ y)=ad-ax-dy+xy-bc$

$\quad =(y-a)x-dy+ad-bc$ …… xについての1次式

$\quad =(x-d)y-ax+ad-bc$ …… yについての1次式

$f(\lambda_1,\ \lambda_1)=0,\ f(\lambda_2,\ \lambda_2)=0$ …… Caylay-Hamilton

＊$f(\lambda_2,\ \lambda_1)=0,\ f(\lambda_1,\ \lambda_2)=0$ と仮定すると

$f(x,\ y)$をyを固定してxの1次式としてみると，$f(\lambda_1,\ y)=0,\ f(\lambda_2,\ y)=0$ より，任意のxについて $f({}^{\forall}x,\ {}^{\forall}y)=0$ となる．また，xを固定して，yの1次式としてみると，$f(x,\ \lambda_1)=0,\ f(x,\ \lambda_2)=0$ より，任意の各xについて，任意のyを代入した$f(x,\ y)$は0になる．ゆえに，${}^{\forall}x,\ y$ について $f(x,\ y)=0$ となり，$f(\lambda,\ \lambda)=0$ が無数の解をもつことになり，これはAの固有値が，たかだか2個であることに矛盾する．よって，$\lambda_1,\ \lambda_2$ の順序を適当に定めると，$\det P\neq 0$ となり，Pは正則となる.

② $n=3$ のとき，$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ とする．$A^2=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}$ とおく.

$$P=A^2-A\begin{pmatrix} \lambda_2+\lambda_3 & & \\ & \lambda_3+\lambda_1 & \\ & & \lambda_1+\lambda_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3 & & \\ & \lambda_3\lambda_1 & \\ & & \lambda_1\lambda_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} b_{11}-a_{11}(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2\lambda_3 & b_{12}-a_{12}(\lambda_3+\lambda_1) & b_{13}-a_{13}(\lambda_1+\lambda_2) \\ b_{21}-a_{21}(\lambda_2+\lambda_3) & b_{22}-a_{22}(\lambda_3+\lambda_1)+\lambda_3\lambda_1 & b_{23}-a_{23}(\lambda_1+\lambda_2) \\ b_{31}-a_{31}(\lambda_2+\lambda_3) & b_{32}-a_{32}(\lambda_3+\lambda_1) & b_{33}-a_{33}(\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_1\lambda_2\end{pmatrix}$$

$\det P=f(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$ とすると，$f(x,\ y,\ z)$ は２つの変数を固定した場合，１つの変数についての２次式である．

$f(\lambda_i,\ \lambda_i,\ \lambda_i)=\det(A-\lambda_i E)^2=\{\det(A-\lambda_i E)\}^2=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$ 　Caylay-Hamilton

また $f(\lambda_i,\ \lambda_i,\ \lambda_j)=\det\left\{A^2-A\begin{pmatrix}\lambda_i+\lambda_j & & \\ & \lambda_j+\lambda_i & \\ & & \lambda_i+\lambda_i\end{pmatrix}+\lambda_i\begin{pmatrix}\lambda_j & & \\ & \lambda_j & \\ & & \lambda_i\end{pmatrix}\right\}$

$$=\det\left[\left\{A-\begin{pmatrix}\lambda_j & & \\ & \lambda_j & \\ & & \lambda_i\end{pmatrix}\right\}(A-\lambda_i E)\right]=0$$

同様に $f(\lambda_i,\ \lambda_j,\ \lambda_i)=0,\ f(\lambda_j,\ \lambda_i,\ \lambda_i)=0$ である．

ここで，$f(\lambda_i,\ \lambda_j,\ \lambda_k)=0$ $(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3,\ i,\ j,\ k$ は互いに異なる$)$ と仮定．

$y,\ z$ を固定すると $f(\lambda_1,\ y,\ z)=0,\ f(\lambda_2,\ y,\ z)=0,\ f(\lambda_3,\ y,\ z)=0 \quad \therefore \quad f({}^{\forall}x,\ {}^{fix}y,\ {}^{fix}z)=0$

また，任意の各 x について，$f(x,\ \lambda_i,\ z)=0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ より，任意の各 x と，任意の y について，$f({}^{\forall fix}x,\ {}^{\forall}y,\ {}^{fix}z)=0$ である．

同様に，任意の各組 $(x,\ y)$ について，$f(x,\ y,\ \lambda_i)=0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ より，${}^{\forall}x,\ y,\ z$ について，$f(x,\ y,\ z)=0$ となり，$n=2$ のときと同様の矛盾が生ずる．よって，$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ の順序を適当に定めると，$\det P\neq 0$ となり，P は正則となる．

（注） 以下 n 次の場合も同様に証明できると思われるが，表現の方法が困難で，まだ証明は終わっていない．

〈２次の場合の応用範囲を広げる〉

① ここで，いろいろな例について考えてみると，A が実行列であっても，$\lambda_1,\ \lambda_2$ は実数であるとは限らない．$\lambda_1,\ \lambda_2$ は実数係数の２次方程式の解であるので，共役な複素数となることがある．

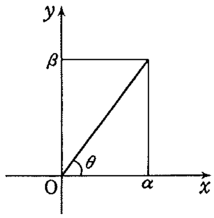
$\lambda_1=\alpha+\beta i,\ \lambda_2=\alpha-\beta i$ の場合．

$X\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}X$ を満たす X を求める．

$X=\begin{pmatrix}i & 1\\ 1 & i\end{pmatrix}$ が上の式を満たす X の１つであり，$X^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & 1\\ 1 & -i\end{pmatrix}$ である．

よって，$X\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}X^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$ となる．

また $\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ となり



$XP^{-1}APX^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$(XP^{-1}APX^{-1})^n=(\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^n\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$

$A^n=(\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^n PX^{-1}\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}XP^{-1}$ となる．

② $\lambda_1=\lambda_2$（重解）への対応

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ について，$\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$ が重解をもつならば，$P=\begin{pmatrix}a-\lambda & b+1\\ c & d-\lambda\end{pmatrix}$ とすると，

$c\neq 0$ ならば $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$，$c=0,\ b\neq 0$ ならば $\frac{1}{b}A=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$，$b=c=0$ ならば $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$

$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$ より $\quad A^n=P\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix}P^{-1}$

〈演習　河村の方法〉

1-1　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$x^2-(\quad\quad)x+(\quad\quad)=0$ をAの固有方程式という．

この解を α, β とすると，解と係数の関係より

i ）$\alpha\neq\beta$ $\begin{cases} \alpha+\beta= \\ \alpha\beta= \end{cases}$　ii ）$\alpha=\beta$ $\begin{cases} 2\alpha= \\ \alpha^2= \end{cases}$

1-2　$A\vec{x}=k\vec{x}$ を満たす $\vec{x}\neq\vec{0}$ をAの固有ベクトル，kをAの固有値という．α, β を固有方程式の解とすると，次の等式が成立することを示せ．

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-\alpha \\ c \end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix} a-\alpha \\ c \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d-\alpha \end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix} b \\ d-\alpha \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-\beta \\ c \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} a-\beta \\ c \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d-\beta \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} b \\ d-\beta \end{pmatrix}$

2-1　$\alpha\neq\beta$ のとき，$P_{\alpha,\beta}=\begin{pmatrix} a-\alpha & b \\ c & d-\beta \end{pmatrix}$,

$P_{\beta,\alpha}=\begin{pmatrix} a-\beta & b \\ c & d-\alpha \end{pmatrix}$ とすると，

$A\cdot P_{\alpha,\beta}=P_{\alpha,\beta}\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$，$A\cdot P_{\beta,\alpha}=P_{\beta,\alpha}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

が成立することを示せ．

2-2　$P_{\alpha,\beta}$, $P_{\beta,\alpha}$ の少なくとも一方は逆行列をもつことを示せ．

2-3　$P_{\alpha,\beta}$ に逆行列が存在すると仮定すると，

$P_{\alpha,\beta}{}^{-1}\cdot A\cdot P_{\alpha,\beta}=\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ となる．

よって，両辺をn乗して，

$$(P_{\alpha,\beta}{}^{-1}\cdot A\cdot P_{\alpha,\beta})^n=\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$$

より，計算すると，

$A^n=\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}^{-1}$ である．

3-1　$\alpha=\beta$（重解）のとき，$c\neq0$ ならば

$P=\begin{pmatrix} a-\alpha & b+1 \\ c & d-\alpha \end{pmatrix}$ とすると，

$AP=P\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ が成立する．また，$b\neq0$ のとき，$P=\begin{pmatrix} a-\alpha & b \\ c+1 & d-\alpha \end{pmatrix}$ とすると，

$AP=P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ が成立することを示せ．

3-2　上で求めたPには P^{-1} が存在することを示せ．

3-3　**3-2** の結果より　$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ または

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ となる．

$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$ or $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}^n$

より，計算すると，

$A^n=\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}^{-1}$

または

$A^n=\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}^{-1}$

である．

4-1　$\alpha\neq0$, $\beta=0$ のとき，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2=\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を示せ．

4-2　上の結果より，$A^n=$＿＿＿$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ である．

5-1　$\alpha=\beta=0$ のとき，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を示せ．

5-2　上の結果より，$A^n=$＿＿＿

（ただし $n\geqq2$）

1-1

$x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$

i ）　$\alpha\neq\beta$　$\begin{cases} \alpha+\beta=a+d \\ \alpha\beta=ad-bc \end{cases}$

ii ）　$\alpha=\beta$　$\begin{cases} 2\alpha=a+d \\ \alpha^2=ad-bc \end{cases}$

1-2

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-\alpha \\ c \end{pmatrix}-\beta\begin{pmatrix} a-\alpha \\ c \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a(a-\alpha)+bc \\ c(a-\alpha)+cd \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \beta a-\beta\alpha \\ \beta c \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a(a-\alpha)+bc \\ c(a+d-\alpha) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} (a+d-\alpha)a-ad+bc \\ (a+d-\alpha)c \end{pmatrix}$

（**1-1** の i ）より）

$=O$

$\therefore$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-\alpha \\ c \end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix} a-\alpha \\ c \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d-\alpha \end{pmatrix}-\beta\begin{pmatrix} b \\ d-\alpha \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} ab+b(d-\alpha) \\ bc+d(d-\alpha) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \beta b \\ \beta d-\beta\alpha \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} b(a+d-\alpha) \\ bc+d(d-\alpha) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} (a+d-\alpha)b \\ (a+d-\alpha)d-ad+bc \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} b(a+d-\alpha) \\ bc+d(d-\alpha) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} (a+d-\alpha)b \\ bc+d(d-\alpha) \end{pmatrix}=O$

$\therefore\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d-\alpha \end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix} b \\ d-\alpha \end{pmatrix}$

(3), (4) 略

2-1

$A\cdot P_{\alpha,\beta}-P_{\alpha,\beta}\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-\alpha & b \\ c & d-\beta \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a-\alpha & b \\ c & d-\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a(a-\alpha)+cb & ab+b(d-\beta) \\ c(a-\alpha)+dc & cb+d(d-\beta) \end{pmatrix}$

$-\begin{pmatrix} \beta(a-\alpha) & b\alpha \\ c\beta & \alpha(d-\beta) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a(a-\alpha)+cb & b(a+d-\beta) \\ c(a+d-\alpha) & cb+d(d-\beta) \end{pmatrix}$

$-\begin{pmatrix} (a+d-\alpha)a-ad+bc & b(a+d-\beta) \\ c(a+d-\alpha) & (a+d-\beta)d-ad+bc \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a(a-\alpha)+cb & b(a+d-\beta) \\ c(a+d-\alpha) & cb+d(d-\beta) \end{pmatrix}$

$-\begin{pmatrix} a(a-\alpha)+cb & b(a+d-\beta) \\ c(a+d-\alpha) & cb+d(d-\beta) \end{pmatrix}=O$

$\therefore\quad A\cdot P_{\alpha,\beta}=P_{\alpha,\beta}\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

同様にして　$A\cdot P_{\beta,\alpha}=P_{\beta,\alpha}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

2-2

背理法より　$P_{\alpha,\beta}$, $P_{\beta,\alpha}$ が両方とも逆行列をもたないと仮定すると

$\Delta(P_{\alpha,\beta})=(a-\alpha)(d-\beta)-bc=0$　…… ①

$\Delta(P_{\beta,\alpha})=(a-\beta)(d-\alpha)-bc=0$　…… ②

①+② より

$2(ad-bc)+2\alpha\beta-(a+d)(\alpha+\beta)=0$

解と係数の関係より　$4\alpha\beta-(\alpha+\beta)^2=0$

$\therefore\quad \alpha=\beta$

$\alpha\neq\beta$ から仮定に反する．

よって，$P_{\alpha,\beta}$, $P_{\beta,\alpha}$ の少なくとも1つは逆行列をもつ．

2-3

$P_{\alpha,\beta}$ の逆行列が存在すると仮定すると，

$A^n=\begin{pmatrix} a-\alpha & b \\ c & d-\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta^n & 0 \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-\alpha & b \\ c & d-\beta \end{pmatrix}^{-1}$

である．

3-1

◦ $c\neq0$

$AP-P\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-\alpha & b+1 \\ c & d-\alpha \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a-\alpha & b+1 \\ c & d-\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a^2-a\alpha+bc & ab+a+bd-b\alpha \\ ca-c\alpha+cd & cb+c+d^2-d\alpha \end{pmatrix}$

$-\begin{pmatrix} a\alpha-\alpha^2 & a-\alpha+b\alpha+\alpha \\ \alpha c & c+d\alpha-\alpha^2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \alpha^2-\alpha(a+d)+bc+(ad-bc) & ab+bd-b(a+d) \\ ca+cd-c(a+d) & bc+d^2-d(a+d)+(ad-bc) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

◦ $b\neq0$

$AP-P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-\alpha & b \\ c+1 & d-\alpha \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a-\alpha & b \\ c+1 & d-\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a^2-a\alpha+bc+b & ab+bd-b\alpha \\ ca-c\alpha+dc+d & bc+d^2-d\alpha \end{pmatrix}$

$-\begin{pmatrix} a\alpha-\alpha^2+b & \alpha b \\ c\alpha+\alpha+d-\alpha & d\alpha-\alpha^2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \alpha^2-\alpha(a+d)+bc+(ad-bc) & ab+bd-b(a+d) \\ ca+cd-c(a+d) & bc+d^2-d(a+d)+(ad-bc) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore\quad AP=P\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\ (c\neq0),$

$AP=P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}\ (b\neq0)$

3-2

◦ $P=\begin{pmatrix} a-\alpha & b+1 \\ c & d-\alpha \end{pmatrix}$ のとき $(c\neq0)$

$\Delta(P)=(a-\alpha)(d-\alpha)-c(b+1)$

$=\alpha^2-(a+d)\alpha+ad-bc-c$

$=-c\neq0$

◦ $P=\begin{pmatrix} a-\alpha & b \\ c+1 & d-\alpha \end{pmatrix}$ のとき $(b\neq0)$

$$\begin{aligned}\Delta(P)&=(a-\alpha)(d-\alpha)-b(c+1)\\&=\alpha^2-(a+d)\alpha+ad-bc-b\\&=-b\neq 0\end{aligned}$$

$\therefore$ Pには逆行列 P^{-1} が存在する．

3-3

$$A^n=\begin{pmatrix}a-\alpha & b+1\\ c & d-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}a-\alpha & b+1\\ c & d-\alpha\end{pmatrix}^{-1}$$

または

$$A^n=\begin{pmatrix}a-\alpha & b\\ c+1 & d-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 1 & \alpha\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}a-\alpha & b\\ c+1 & d-\alpha\end{pmatrix}^{-1}$$

である．

4-1

解と係数の関係より　$\alpha=a+d$，$0=ad-bc$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\ c(a+d) & bc+d^2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a^2+ad & b(a+d)\\ c(a+d) & ad+d^2\end{pmatrix}\\&=\alpha\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\end{aligned}$$

4-2　上の結果より　$A^n=\alpha^{n-1}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

5-1

$$\text{左辺}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+dc & bc+d^2\end{pmatrix}$$

1-1 から，$\alpha=0$，$\beta=0$ だから $\begin{cases}a=-d\\ ad=bc\end{cases}$ より

$$\begin{aligned}&=\begin{pmatrix}-ad+ad & -bd+bd\\ -dc+dc & ad-ad\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\text{右辺}\end{aligned}$$

より成立．

5-2　上の結果より，$A^n=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$（ただし $n\geqq 2$）

である．

（岐阜県立可児高等学校）