相似形の一性質について

舟川（ふなかわ） 勇（いさむ）

（は じ め に）

今更いうまでもないが，相似の位置にある 2 つの多角形において，例えば図 (1) のごとく，△ABC∽△XYZ とし，AP : PX＝BM : MY＝CN : NZ とすると △PMN∽△ABC である．

ところが相似の位置になくても，この事実が成り立つことに，たまたま気が付いた．即ち

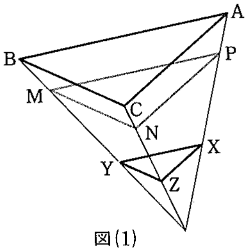


図 (1)

（本　題）

図 (2) のごとく，同一平面上に同じ向きに相似な多角形 ABC, …… と XYZ, …… があるとき，AX, BY, CZ, …… を同じ比に分ける点をそれぞれ P, M, N, …… とすれば，多角形 PMN, …… はまた，もとの多角形に相似である．

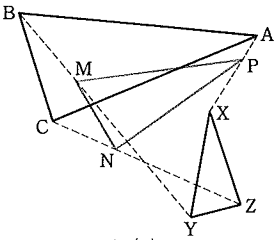


図 (2)

陳腐な内容ながら，いささか興味を感じてその証明を色々試みたものの，なかなか成功しなかった．四苦八苦の末，次に示すような補題の助けを借りることによって漸く証明できた．もっとエレガントな証明がありそうに思われる．あるいは射影幾何の分野かも知れない．ご教示を仰ぐ次第である．

（補　題）

図 (3) のごとく，直線 l 上の動点 A_0 が A より等速に動いて B に移る間に，直線 m 上の動点 X_0 が X より等速に動いて Y に移るとする．このとき A_0X_0 を $s : t$（定比）に分ける点の軌跡は線分 PM である．ただし，P は AX を，M は BY を $s : t$ に分ける点である．

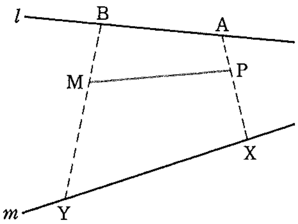


図 (3)

（補 題 の 証 明）

これ自体の証明については，ベクトルを用いると簡単明瞭であるが，本題の証明に利用する関係上，次の初等的方法によった．

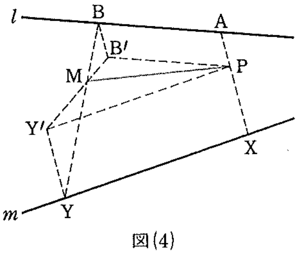


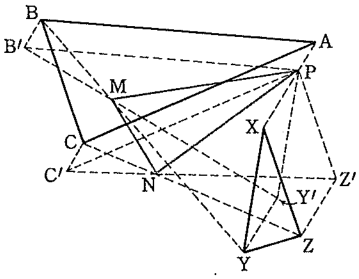
図 (4)

図 (4) のように，P より AB に平行に等しい線分 PB′ を引き，また，P より XY に平行に等しい線分 PY′ を引くと，BY と B′Y′ との交点は M と一致する．ところが，△PB′Y′ は位置と形状が一定であり，M は B′Y′ を定比に分ける点である．

よって，PM は定位置，定方向となり，軌跡はこの線分 PM である．

この補題を用いて本題の証明を示す．

(本題の証明)



図(5)

補題に準じて，図(5)のようにPより AB，AC にそれぞれ，平行にかつ等しく PB′，PC′ を引き，また，Pより XY，XZ にそれぞれ，平行にかつ等しく PY′，PZ′ を引いたとき，B′Y′，C′Z′ を $s:t$ に分ける点は補題により，それぞれ M，N と一致する．

次に，△PB′Y′∽△PC′Z′ だから

$$PM : PN = PB' : PC' = AB : AC$$

$$\angle MPN = \angle B'PC' = \angle BAC$$

$$\therefore\ \triangle PMN \backsim \triangle ABC$$

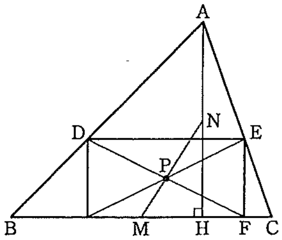
これより多角形の場合にも成り立つことが分かる．

(ついでに)

座標幾何でよくある問題．図(6)のように，鋭角三角形 ABC に内接する長方形の対角線の交点の軌跡を考える．

$$AD : DB = AE : EC = HF : FC$$

だから，底辺 BC の中点をM，垂線 AH の中点をNとすれば，補題より DF の中点Pの軌跡として求める軌跡は，直ちに線分 MN であることが分かり，方程式を作るより簡単に求められる．



図(6)

以上新鮮味のない内容ながら，図形について多少の面白味もあると思われるので，おこがましくも投稿させていただいた．重ねてご教示，ご批判を乞う次第です．

(京都共栄学園)