微分方程式の指導上の問題点

石濱（いしはま）　文武（ふみたけ）

§まえがき

高校で微分方程式を扱う場合に，以下に述べるような解法上の問題点がありますが，教科書ではその点に触れていません．「微分・積分」では多少理論的な面を強調して授業をしていながら，この点を見て見ぬふりをするのは心苦しい．さりとてあまり深入りはしたくない．このような悩みをもちながら微分方程式を教えておられる方も多いのではないでしょうか．

この稿では，この点に関する指導についての一つの考え方を紹介して，皆様方のご批判を仰ぎたいと思います．

§問題点の指摘

[1]　微分方程式　$y'=y$ を解け．

（解）（i）$y \neq 0$ のとき

$$\int \frac{dy}{y}=\int dx$$

$$\log|y|=x+C$$

$$y=Ae^x \ (A\text{は任意定数で，}A \neq 0)$$

（ii）$y=0$ のとき

明らかに，定数関数 $y=0$ は解であるが，これは（i）の解で $A=0$ とおいて得られる．

（問題点）一般に，x の関数 $y=y(x)$ について，次の3通りの可能性がある．

(I)	すべての x に対して	$y(x) \neq 0$
(II)	すべての x に対して	$y(x)=0$
(III)	ある範囲の x に対して	$y(x)=0$
	その他の x に対して	$y(x) \neq 0$

念のため，(III) を論理記号を使って書けば

$\exists x_0 : y(x_0)=0$　かつ　$\exists x_1 : y(x_1) \neq 0$　となる．

[1] の解法では，(III) の場合が抜けている．それが問題点である．

$$y'=y \Longrightarrow y=Ae^x$$

であることがいえてないから，これ以外にも解があるかもしれないわけである．

結果的には，[1] については，(III) は起こり得ないのであるが，そのことを示す必要がある．

[2]　微分方程式　$y'=2\sqrt{|y|}$ を解け．

（解）（i）$y>0$ のとき

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}}=\int dx$$

$$\sqrt{y}=x-C$$

$$y=(x-C)^2 \quad (x>C)$$

（ii）$y<0$ のとき

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{-y}}=\int dx$$

$$-\sqrt{-y}=x+C'$$

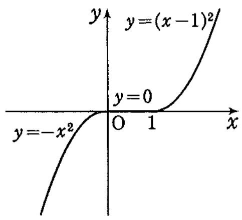
$$y=-(x+C')^2 \quad (x<-C')$$

（C, C' は任意定数）

（iii）定数関数 $y=0$ は解である．

（問題点）この解答でも，(III) の場合が抜けている．しかも，例えば，次のような解がある．

$$y=\begin{cases} -x^2 & (x \leqq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (0 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき}) \\ (x-1)^2 & (x \geqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$



この関数 $y=y(x)$ については

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき} & y(x)=0 \\ \text{その他のとき} & y(x) \neq 0 \end{cases}$$

という性質を満たしているから，上記の (I), (II), (III) のうちの，(III) を満たす例にあたる．

[3]　微分方程式 $y''=-\omega^2 y$ $(\omega \neq 0)$ を解け．

(解)　$y_1=\cos\omega x$，$y_2=\sin\omega x$　とおくと，y_1，y_2 は一次独立な特殊解だから，

$y=A\cos\omega x+B\sin\omega x$　(A，B は任意定数)

が求める解である．

(問題点)　この場合にも，解がこれ以外にはないことが，生徒の眼でみれば不明である．

次のことに注意する必要がある．

微分方程式の一般解がすべての解を表しているとは限らない．

いわゆる特異解の存在である．周知の通り [3] は特異解をもたない．しかし，それには補充説明が必要である．

ここで指摘された問題点にどのように対処すればよいのでしょうか．高校で，微分方程式の基礎理論(解の存在と一意性の定理) を教えるというわけにもまいりません．

§指導案

(イ) 案：一般には上記のような問題点があるが，具体的には，[1]，[3] の微分方程式には問題がないことが知られている，という説明をする．

(ロ) 案：理論的に問題のない解法を一度示し，結局，普通には，[1]，[3] で示した解法でもよいことを納得させる．

教科書では (イ) 案の考え方をとっていると思われます．

ここでは，(ロ) 案の考え方に基づいて，具体的に，理論的に問題のないと思われる解法を示したいと思います．いずれも，積分因数の考えを用いた方法で，[4] についてはよく知られている方法です．

[4]　微分方程式 $y'=ky$ $(k\neq 0)$ を解け．

(解)　$y'-ky=0$

両辺に　e^{-kx} をかけて

$e^{-kx}y'-e^{-kx}ky=0$

$(e^{-kx}y)'=0$

$e^{-kx}y=A$

$\therefore$　$y=Ae^{kx}$　(Aは任意定数)

これが原式を満たしていることは明らかである．

(検討)　この解法によれば，$y'=ky$ の解は $y=Ae^{kx}$ の形のものに限られることが示されたことになります．そして，

$\exists x_0 : y(x_0)=0 \iff A=0 \iff \forall x : y(x)=0$

が成立するから，微分方程式 $y'=ky$ の解 $y=y(x)$ については，[1] で述べた (I)，(II)，(III) の場合分けのうち，(III) が起こり得ないことが示されたことになります．

[5]　微分方程式 $y''=-\omega^2 y$ $(\omega\neq 0)$ を解け．

(解)　$y''+\omega^2 y=0$

$(y''+\omega^2 y)\sin\omega x=0$

$(y''\sin\omega x+\omega y'\cos\omega x)$

$-(\omega y'\cos\omega x-\omega^2 y\sin\omega x)=0$

$(y'\sin\omega x)'-(\omega y\cos\omega x)'=0$

$(y'\sin\omega x-\omega y\cos\omega x)'=0$

$\therefore$　$y'\sin\omega x-\omega y\cos\omega x=C_1$ …… ①

また　$(y''+\omega^2 y)\cos\omega x=0$　から同様にして

$y'\cos\omega x+\omega y\sin\omega x=C_2$ …… ②

(C_1，C_2 は任意定数) をうる．

①，② から y' を消去して

$$y=\frac{-C_1}{\omega}\cos\omega x+\frac{C_2}{\omega}\sin\omega x$$

$=A\cos\omega x+B\sin\omega x$　(A，B は任意定数)

逆に，これが原式を満たしていることは明らかである．

(検討)　この解法によれば，$y''=-\omega^2 y$ の解は $y=A\cos\omega x+B\sin\omega x$ の形のものに限られることが示されたことになります．

§おわりに

上に述べた方法は，一般に

一階線形斉次微分方程式　$y'+P(x)y=0$

定数係数二階線形斉次微分方程式

$y''+ay'+by=0$

に対しても拡張できます．

なお，$y''+ay'+by=0$ の特殊解 y_1，y_2 について y_1 と y_2 が一次独立 $\Longrightarrow W(y_1, y_2)=y_1'y_2-y_1y_2'\neq 0$ が成立することを仮定すれば，解が y_1 と y_2 の一次結合　$y=Ay_1+By_2$　の形に限られることが，初等的方法で証明できます．

最後に，[2] あるいは，$xy'=2y$ (非正規形) の形のものは，高校では扱うべきではない，と思います．

(神奈川県立湘南高等学校)