[付　録]*

“2×2 行列の三角化と対角化についての議論”

青柳（あおやぎ）　龍彦（たつひこ）

前記（数研通信 No. 2 *p.* 14～*p.* 17 参照）のような研究授業用資料を作成する中，もっと根本的に考え直す必要を感じました．そこで色々な文献を漁りました．その中で，

有馬　哲　著　線形代数入門　東京図書　1984

が適当であると分りました．この書物を勉強させて貰い，参照或いは引用させて戴いて，一つの教材研究としてこの付録をまとめました．特に例 1，例 2 はそのまま引用させて戴いております．感謝申し上げます．

数体 K 上の 2×2 行列の集合を M(K) とする．

[定理 1]（三角化）

「$A \in \mathrm{M(K)}$ に対して，ある正則行列 $P \in \mathrm{M(K)}$ があって，$P^{-1}AP$ が三角行列

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

となるためには，λ_1，$\lambda_2 \in$ K が A の固有値であることが必要十分である．（$\lambda_1=\lambda_2$ でもよい）」

証）（必要性）

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad A,\ P \in \mathrm{M(K)}$$

であれば，直接計算することにより

$$\det(\lambda E-P^{-1}AP)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$$

一方，

$$\begin{aligned}\det(\lambda E-P^{-1}AP)&=\det(P^{-1}(\lambda E-A)P)\\&=\det(P^{-1}P)\det(\lambda E-A)\\&=\det(\lambda E-A)\end{aligned}$$

であるから

$$\det(\lambda E-A)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$$

したがって，λ_1，λ_2 は $\det(\lambda E-A)=0$ の解，すなわち，A の固有値である．

（十分性）

$\lambda_1(\in \mathrm{K})$ は A の固有値であるから

$$\det(\lambda_1 E-A)=0$$

したがって，下の補題により，ある正則行列 $P_1 \in \mathrm{M(K)}$ があって，

$$P_1^{-1}(\lambda_1 E-A)P_1=\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

となる．

$$\therefore\quad P_1^{-1}(\lambda_1 E)P_1-P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

ゆえに，

$$P_1^{-1}AP_1=\lambda_1 E-\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

とおける．直接計算により

$$\det(\lambda E-P_1^{-1}AP_1)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-k)$$

一方，λ_1，λ_2 は A の固有値であるから

$$\begin{aligned}\det(\lambda E-P_1^{-1}AP_1)&=\det(\lambda E-A)\\&=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\end{aligned}$$

この 2 式が同じであることより

$$k=\lambda_2$$

$$\therefore\quad P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{\textit{q.e.d.}}$$

したがって，任意の $A \in \mathrm{M(K)}$ に対して正則行列 $P \in \mathrm{M(K)}$ を適当にとれば，$P^{-1}AP$ は上三角行列になる．

[補題]

「$B \in \mathrm{M(K)}$ に対して，$\det B=0$ ならば，ある $P_1 \in \mathrm{M(K)}$ があって，$P_1^{-1}BP_1=\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ となる．」

証） $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ad-bc=0)$，

$$P=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \quad (ps-qr \neq 0)$$

とすると

$$BP=\begin{pmatrix} ap+br & * \\ cp+dr & * \end{pmatrix}$$

いま，$ap+br=0$ とすれば，$ad-bc=0$ より

$$cp+dr=0$$

ゆえに，$ap+br=0$，$ps-qr \neq 0$ を満たす P を P_1

とすれば

$$BP_1=\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ P_1^{-1}BP_1=\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \qquad q.e.d.$$

次のような多項式 $\mu(\lambda)$ を定めると，2×2 行列 A が対角化可能か否かを決定できる．

[定義]

「多項式 $\mu(\lambda)$ を $A\in \mathrm{M}(\mathsf{K})$ に対して定める．すなわち，λ_1，$\lambda_2\in\mathsf{K}$ が A の固有値のとき，

$$\mu(\lambda)=\begin{cases}(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) & (\lambda_1\neq\lambda_2 \text{ のとき}) \\ \lambda-\lambda_1 & (\lambda_1=\lambda_2 \text{ のとき})\end{cases}$$

と定義する．」

[定理 2] (対角化)

「(1) $\mu(A)=O$ ならば，ある正則行列 $P\in\mathrm{M}(\mathsf{K})$ があって $P^{-1}AP$ は対角行列になる．

(2) $\mu(A)\neq O$ ならば，どんな正則行列 $P\in\mathrm{M}(\mathsf{K})$ をとっても $P^{-1}AP$ は対角行列にならない．」

証) (1) $\lambda_1\neq\lambda_2$ のとき

$$\mu(A)=(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)=O$$

これは，ハミルトン・ケイリーの定理であるから，当然成り立つ．

よってこの場合は，定理 1 を参照して "$\lambda_1\neq\lambda_2$ ならば $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ となる P が存在する" を示さなければならないが，この証明は定理 3 に譲る．

$\lambda_1=\lambda_2$ のときは

$$\mu(A)=A-\lambda_1E=O \qquad \therefore\ A=\lambda_1E$$

$P\in\mathrm{M}(\mathsf{K})$ を正則行列とすれば

$$P^{-1}AP=P^{-1}(\lambda_1E)P=\lambda_1E$$

これは明らかに対角行列である．

(2) 対偶を示す．ある正則行列 $P\in\mathrm{M}(\mathsf{K})$ が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になったとすると，定理 1 を参照して

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

とかける．

$\lambda_1\neq\lambda_2$ のときは

$$\det(\lambda E-P^{-1}AP)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$$
$$=\mu(\lambda)$$

ゆえに，$\mu(A)=(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)$ となるが，ハミルトン・ケイリーの定理より　$\mu(A)=O$

$\lambda_1=\lambda_2$ のときは

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}=\lambda_1E$$

$$\therefore\ A=P(\lambda_1E)P^{-1}=\lambda_1E$$

$$\therefore\ \mu(A)=A-\lambda_1E=O \qquad q.e.d.$$

以上二つの定理の応用例を述べる．

(例 1)

$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有多項式は

$$\det(\lambda E-A)=\lambda^2+1=(\lambda-i)(\lambda+i)$$

であるから，$\mu(\lambda)=\lambda^2+1$ に対して

$$\mu(A)=A^2+E=-E+E=O$$

ゆえに，ある複素正則行列 $P\in\mathrm{M}(\mathbb{C})$ があって

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

(例 2)

$B=\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ の固有多項式は

$$\det(\lambda E-B)=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$$

であるから，$\mu(\lambda)=\lambda-1$ に対して

$$\mu(B)=B-E=\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}\neq O$$

よって，定理 2 により，どんな正則行列 $P\in\mathrm{M}(\mathsf{K})$ をもってきても $P^{-1}BP$ は対角行列にならない．

定理 1 により，有理数を成分とするある正則行列 $Q\in\mathrm{M}(\mathbb{Q})$ があって

$$Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b\neq 0)$$

[定理 3] (対角化における P の決定)

「$A\in\mathrm{M}(\mathsf{K})$ の固有値 λ_1，$\lambda_2\in\mathsf{K}$ に対する固有ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{x_1}$，$\overrightarrow{x_2}$ $(\neq\vec{0})$ とする．

$P=(\overrightarrow{x_1}\ \ \overrightarrow{x_2})\in\mathrm{M}(\mathsf{K})$ とおくと，$\lambda_1\neq\lambda_2$ ならば P は正則で　$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$」

証) 定理の条件により

$$A\overrightarrow{x_1}=\lambda_1\overrightarrow{x_1},\ A\overrightarrow{x_2}=\lambda_2\overrightarrow{x_2} \quad (\lambda_1\neq\lambda_2)$$

$$\therefore\ (A\overrightarrow{x_1}\ \ A\overrightarrow{x_2})=(\lambda_1\overrightarrow{x_1}\ \ \lambda_2\overrightarrow{x_2})$$

$$A(\overrightarrow{x_1}\ \ \overrightarrow{x_2})=(\overrightarrow{x_1}\ \ \overrightarrow{x_2})\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$P=(\overrightarrow{x_1}\ \ \overrightarrow{x_2})$ より

$$AP=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

ところで，$\lambda_1\neq\lambda_2$ のとき，$\overrightarrow{x_1}$ と $\overrightarrow{x_2}$ が一次従属

$i.e.$ $\overrightarrow{x_2}=t\overrightarrow{x_1}$ $(t\in \mathrm{K},\ t\neq 0)$

とすれば，$A\overrightarrow{x_2}=\lambda_2\overrightarrow{x_2}$ より

$$tA\overrightarrow{x_1}=t\lambda_2\overrightarrow{x_1} \quad (t\neq 0)$$

ゆえに　$A\overrightarrow{x_1}=\lambda_2\overrightarrow{x_1}$ となり　$\lambda_1=\lambda_2$

これは矛盾だから，$\overrightarrow{x_1}$ と $\overrightarrow{x_2}$ は一次独立である．

$\overrightarrow{x_1}=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{x_2}=\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}$ とおくと $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}\neq k\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}$

ゆえに，$\begin{cases}x_1=kx_2\\ ky_2=y_1\end{cases}$ でないから

$$k(x_1y_2-x_2y_1)\neq 0 \quad (k\neq 0)$$

$\therefore\ \det P=\det(\overrightarrow{x_1}\ \ \overrightarrow{x_2})=x_1y_2-x_2y_1\neq 0$

よって，P は正則であって，$(*)$ より

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \qquad \textbf{\textit{q.e.d.}}$$

この定理により，定理２の(1)が示されたことになる．

（付録まとめ S 62．10．28）

（福岡大学附属大濠高等学校）

＊付録とは，前号の「2×2 行列の対角化とその応用」に対するものです．　……（編集部 注）