Series～指導の具体例

テーマを決めて問題を集めよう

中村　一夫（なかむら　かずお）

前任校の第2学年（61年度）の学年末課題として

A　判別式を使って解く問題

B　$ad-bc$ が出てくる問題

を，できるだけ多く集めること，できれば問題を自作してみることを課しました．

そのねらいは

1．問題を集める過程で，数学Ⅰ，基礎解析，代数・幾何の総合的な復習ができること

2．同じように扱える問題，見かけは違っていてもどこかに共通点のある問題を集めることによって，章や科目間の垣根を低くすること

の2点です．

大部分の生徒がレポートを提出し，その内容の分析の結果は多様なものになりました．Aについては10の分類，Bについては6の分類に整理して，その代表的な問題をあげます．

A1　解の判別

◦二つの2次方程式

$$b(x^2+2x)=2a,\ (x+2b)^2=2ax$$

のうち少なくとも一方は実数解をもつことを背理法を用いて証明せよ．a，b は実数とする．

◦2次方程式 $x^2+ax+b=0$ がひきつづいた二つの整数を解にもち，2次方程式 $x^2+bx+a=0$ が正の整数を解にもつとき，a，b の値を求めよ．

◦a，b を定数として，$a>1$，$b>0$ とする．この a，b に対して $a^x+a^y=b$ …… ① という式を考えるとき，$x+y=1$ であるような適当な x，y に対して，① が成り立つための a，b に関する条件を求めよ．

A2　絶対不等式

◦2次式 $x^2+2y^2+7z^2+2xy+4xz+2ayz$ は x，y，z がすべて0の場合を除き，すべての実数値に対して正となる．そのときの a の条件を求めよ．

◦行列 $A=\begin{pmatrix} x & 3x-1 \\ y & x+y \end{pmatrix}$（$x$，$y$ は実数）においてどのような x に対しても，A が必ず逆行列をもつように y のとる値の範囲を求めよ．

◦$a\neq 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\int_0^1(ax+b)^2dx>\left\{\int_0^1(ax+b)\,dx\right\}^2$$

◦$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$ を証明せよ．

A3　平面図形

◦$y=\dfrac{1}{x-a}+b$ と $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフが1点のみを共有するのは，どのような場合か．

◦曲線 $Ax^2+By^2=1$ $(AB\neq 0)$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $Ax_1x+By_1y=1$ であることを証明せよ．

◦実数 a に対して

$$D_a=\{(x,\ y)\,|\,y\leqq -x^2+3a,\ y\geqq x^2-ax+a\}$$

とするとき $D_a\neq\phi$ となるような a の値の範囲を求めよ．

A4　空間図形

◦直線 g と球面 S とを次式で与える．

$$g:\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1}$$

$$S:x^2-2x+y^2+2y+z^2+4z+4=0$$

このとき，直線 g と球面 S は交わらないことを証明せよ．

◦空間座標において yz 平面上に曲線 $z=1-4y^2$ を考える．この曲線を z 軸のまわりに回転してでき

る曲面をSとする．曲面Sとxy平面で囲まれる部分（内部及び境界）をDとし，Dに含まれる最大球をKとする．このとき，球Kの中心と半径を求めよ．

A 5　完全平方式・因数分解

◦等式 $x^2+6xy+10y^2-4x-14y+5=0$ を満たす実数 x，y の値を求めよ．

◦$x^2+xy-6y^2-x+7y+k$ が x，y の1次式の積に分解できるように定数kの値を定め，このとき与式を因数分解せよ．

◦x の2次式 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+5$ が完全平方式となるように，定数kの値を定めよ．

A 6　最大・最小

◦一つの頂点から出る3辺の長さが，x，y，z であるような直方体において，x，y，z の和が6，全表面積が18であるとき，xがとりうる値の範囲を求めよ．

◦a，b を正の定数とする．

$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=1$，$x>0$，$y>0$ のとき $x+y$ の最小値を求めよ．

◦xがすべての実数値をとって変わるとき，

$y=\dfrac{3x}{x^2+x+1}$ のとる値の範囲を求めよ．

◦$y=x+\sqrt{1-x}$ の最大値，最小値を求めよ．

A 7　曲線の通過

◦だ円 $\dfrac{x^2}{a}+ay^2=1$ $(a>0)$ を考える．aがすべての正の実数をとって動くとき，これらのだ円の上にある点全体は，どのような範囲にあるか図示せよ．

◦放物線 $y=1-x^2$ を平行移動させて，その頂点がもとの放物線 $y=1-x^2$ の上を動くようにして得られる放物線が存在する範囲を求めよ．

A 8　軌跡

◦点$P(a, b)$ が 円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くとき，$(a+b, ab)$ を座標とする点はどんな曲線をえがくか．その方程式を求めよ．

◦だ円 $x^2+4y^2=4$ の直交する2接線の交点Pの軌跡を求めよ．

A 9　微分

◦関数 $f(x)=x^3+kx^2-3kx+2$ が極値をもたないようなkの値の範囲を求めよ．

A 10　その他

◦となり合った2辺の比がkである長方形Pがある．その周の長さをl，面積をSとする．周の長さが$\dfrac{1}{2}l$で，面積が$\dfrac{1}{2}S$である長方形Qが作れるためのkの値の範囲を求めよ．

◦動点Pは初速 6m/s で点Aを出発し，加速度 $2\mathrm{m/s^2}$ で東に向かって進んでいる．Pが出発して2秒後に動点QがAを出発して東に向かって一定の速さ am/s でPを追う．QがPに追いつくための a の最小値を求めよ．

◦2次方程式の2解の差の2乗は判別式と同じ符号をもつことを証明せよ．

B 1　平行

◦2直線 $ax+by+c=0$，$a'x+b'y+c'=0$ が平行（一致する場合も含む）になる条件を求めよ．

◦$(1, 2)$，$(3, 1)$，$(x, -1)$ の3点が同一直線上にあるときのxの値を求めよ．

◦$\overrightarrow{OA}=(4, 3)$，$\overrightarrow{OB}=(-5, 2)$ がある．$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{OA}$ かつ $\overrightarrow{AC}/\!/\overrightarrow{OB}$ であるとき $\overrightarrow{OC}$ の成分を求めよ．

B 2　面積

◦$O(0, 0)$，$A(a_1, a_2)$，$B(b_1, b_2)$ とするとき，$\triangle OAB$ の面積を求めよ．

◦$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ad-bc>0)$ 　によって表される1次変換をfとする．fは$P(2, 1)$ をP'にうつし，$Q(1, 2)$ をQ'にうつす．原点をOとして，$\triangle OPQ$ と $\triangle OP'Q'$ の面積が等しいとき a，b，c，d の関係式を求めよ．

B 3　1次変換（連立方程式）

◦$f:\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$ によって $f(P)=P$ となる点が原点以外にも存在するための a，b，c，d の条件を求めよ．

◦$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって，ある直線lが同じ直線lにうつされるとき，2次方程式

$x^2-(a+d)x+ad-bc=0$ は実数解をもつことを示せ．

B 4　比例

∘ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}$ を証明せよ．

∘ A，B は互いに独立な事象で

$$P(\mathrm{A})=0.6,\ P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})=0.4$$

のとき $P(\mathrm{B})$ を求めよ．

B 5　行列式

∘ $P=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について $\varDelta(P)=ad-bc$ とするとき $\varDelta(AB)=\varDelta(A)\varDelta(B)$ を証明せよ．

B 6　分数式

∘ $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}\ (a\neq 0)$ が $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ と変形できる条件は $ad-bc\neq 0$ であることを証明せよ．

（生徒作）

∘ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ の逆関数が存在する条件を求めよ．

（生徒作）

以上のような結果でした．Aについては25題，Bについては12題の問題を集めた生徒がいました．Aについては問題が豊富にあるせいか，自作はほとんどありませんでした．Bについてはテーマが漠然としていたせいか，問題も集めにくく，B 6のような自作問題もありました．

代表的な問題をプリントして生徒に配布すれば，ねらいを達成する上でより効果があったと思いますが，忙しさにまぎれて時機を逸してしまいました．もう一度このような試みをするときには，必ず生徒にフィードバックしたいと思います．

ここで，気づいた点を述べます．Aについては私の予想通りで，問題が多く集まりました．２年生の段階まででも，いかに多くの分野で判別式が使われているがを，また，判別式を使うように仕組んだ問題が多いかを，改めて感じました．判別式を使う問題を集めることは，当初のねらいを達成するためには有意義なテーマだったと思います．

また，Bについては，例えば「平行」を鍵として

平行と比例

平行と連立方程式

平行と１次変換

平行と面積

のつながりが見えてきます．生徒の視点を視野に拡大する効果があると思います．ただし，生徒から集めた問題を整理して，生徒にフィードバックしなければ効果は期待できないでしょう．

今後実施してみたいテーマとしては，

1．場合分けが複雑な問題
2．うっかり割り算を行うと失敗する例
3．(相加平均)≧(相乗平均）を使う問題
4．変域に注意しなければならない問題
5．点から直線（平面）までの距離の公式を使う問題
6．確率と他科目との融合問題
7．中学校の幾何の知識で解ける高校の問題
8．今まで受けた試験問題の中で，同種のミスをくりかえした問題（これは個人のＮＧ集）

等があります．

工夫しだいで，テーマ別問題集を生徒の参加で作ることができると思いますが，いかがでしょうか．

（茨城県立土浦第一高等学校）