「$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$」と微積分の基本定理

寺部（てらべ）　暁（あきら）

1．基本的な考え方

リチャード・ファインマンという物理学者がいます．彼はカリフォルニア工科大学での講義の中で，「もしも今何か大異変が起こって科学的知識が全部なくなってしまい，たった一つの文章だけしか次の時代の生物に伝えられないということになったとしたら，最小の語数で最大の情報を与えるのはどんな文章だろう．」と学生達に問いかけています．そして，「それは原子仮説だろう．」と答えています．つまり，「世界は，もうこれ以上分解することのできない不死のアトムから成り立っている．」という文章のことです．確かに，原子仮説のようなことをきちんと教えたら，「10 を教えて 1 を知る」教育ではなくて，「1 を教えて 10 を知る」教育も不可能なことではないと思います．そこで次の問題は，高校数学における「1」を探し出すことです．この「1」を探す旅が，「高校数学における三原色を求めて」（昨年の 11 月に開かれた，愛知県私学教育研修会でのレポート）だったのです．そこには「筆算による開平法」について書きました．何を今更「筆算による開平法」なんて思う人も多いと思います．しかし，「ニュートンは二項定理という 1 本の木から微積分を作った．」などと言われています．その二項定理，更にオイラーの公式（$e^{ix}=\cos x+i\sin x$）が「筆算による開平法」で，極めて初等的に得られるのです．つまり，一変数微分学の主要部分が再構成できるというわけです．

2．高校数学は一つの理論である

別の角度から高校数学を眺めてみます．自然科学・社会科学・人文科学を問わず，理論と呼ばれるものには議論の出発点としての，有限個の文章 S_1, S_2, ……, S_n があります．公理・公準と言ったり，仮説・前提と言ったり多種多様な言い方がありますが，ここではとりあえず公理という言葉を使うことにしてその集まりを Axiom と書くことにします．

つまり，Axiom$=\{S_1, S_2, \cdots\cdots, S_n\}$ です．次に，理論にはその理論特有の論理がありますが，一般的な共通の論理と併せて，その理論で使用する論理の集まりを Logic と書くことにします．すると，一つの理論における全ての定理は，Axiom から出発して Logic を有限回使用することによって導かれるはずです．Axiom と Logic をいろいろ変化させることによって，いろいろな理論が現れてくるという次第です．ですから，一つの理論における定理の全体を T (Axiom, Logic) と書くことにすると

高校数学＝T (Axiom, Logic)

という形に書くことができます．（当然!!）

（ただし，以後 Logic は 1 階述語論理に固定します．）

Axiom の取り方はいろいろあります．

Axiom＝高校で習う全ての定義

あるいは

Axiom＝高校で習う全ての定義と公式

としても，確かに高校数学が generate（生成）されますが，妥当性を欠くことは明らかでしょう．そこで，できるだけコンパクトで，できるだけ自然で，できるだけ直感的に明らかな Axiom を捜しているというわけです．

僕の考えている Axiom の候補として

(1) 筆算による開平法
(2) 等速直線運動
(3) 原点の回りの 90° の回転
(4) 同程度の確からしさ
(5) 帰納法
(6) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

などがあります．

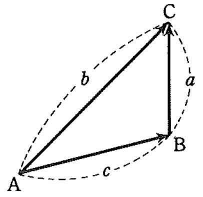
「高校数学における三原色を求めて」では，(1) について説明しました．今回は「高校数学における三原色を求めて（その 2）」ということで，(6) について説明します．

3．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は積分定理そのものである

以下に $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の使い方をいろいろ紹介します．あらい証明，まどろっこしい証明があるかもしれませんが，あくまでも趣旨は「背中の荷物を軽くして数学の旅に出よう．」ということです．

(イ) 余弦定理を導く

まず $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ベクトルの大きさを考えて



$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$ を使って

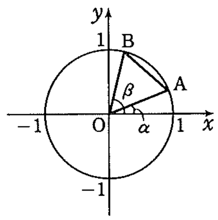
$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を使って

$$c^2+a^2-2ca\cos B=b^2$$
$$\therefore\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

(ロ) 加法定理を導く

右図のように $\triangle\mathrm{OAB}$ をとる．



$\mathrm{A}\,(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，

$\mathrm{B}\,(\cos\beta,\ \sin\beta)$

なので

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$
$$=2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta$$

一方，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ だから (イ) の余弦定理を使って

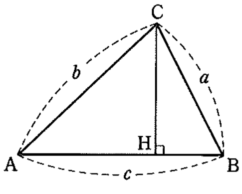
$$\cos(\beta-\alpha)=\frac{1^2+1^2-(2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta)}{2\times1\times1}$$

計算して整理すると

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$

(ハ) 第1余弦定理を導く

$\triangle\mathrm{ABC}$ において右図のように点 H をとると



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HB}}$$

つまり

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AH}+\mathrm{HB}$$
$$\cos A=\frac{\mathrm{AH}}{b},$$
$$\cos B=\frac{\mathrm{BH}}{a}$$

だから　$c=b\cos A+a\cos B$

（要するに「全体は部分の和」ということから，余弦定理がでてくる．）

ここまでは余り「$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$」を有難いとは思わなかったと思いますが，次からはどうでしょうか．

(ニ) 等比級数の和の公式を導く

例えば $r>1$ として，次の図のように $n+1$ 個の点 A_0，A_1，……，A_n をとる．

$$\overrightarrow{\mathrm{A_0A}_n}=\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}+\overrightarrow{\mathrm{A_1A}_n}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}+\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}+\overrightarrow{\mathrm{A_2A}_n}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}+\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}+\cdots\cdots+\overrightarrow{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}$$

$\mathrm{A}_k(r^k)$ なので

$$r^n-1=(r-1)+(r^2-r)+\cdots\cdots+(r^n-r^{n-1})$$
$$=(r-1)+r(r-1)+\cdots\cdots+r^{n-1}(r-1)$$
$$=(r-1)(1+r+\cdots\cdots+r^{n-1})$$
$$\therefore\quad 1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1}=\frac{r^n-1}{r-1}$$

(ホ) 階差数列の和の公式を導く

次の図のように点 A_0，A_1，……，A_n をとると

(ニ) と全く同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{A_0A}_n}=\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}+\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}+\cdots\cdots+\overrightarrow{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}$$

$\mathrm{A}_k(a_k)$ なので，$a_k-a_{k-1}=b_k$ とすると

$$a_n-a_0=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots\cdots+(a_n-a_{n-1})$$
$$=b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n$$
$$=\sum_{k=1}^{n}b_k$$
$$\therefore\quad a_n=a_0+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

（これは「微積分の基本定理」（離散版）です．）

(ヘ) 微積分の基本定理

a_0，……，a_n については下図参照．

$\int_a^b f'(x)\,dx=\overrightarrow{ab}$ とおくと $\overrightarrow{ab}=\overrightarrow{ac}+\overrightarrow{cb}$ が成り立つので

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{ab}&=\overrightarrow{a_0a_n}\\
&=\overrightarrow{a_0a_1}+\overrightarrow{a_1a_2}+\cdots\cdots+\overrightarrow{a_{n-1}a_n}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{a_ka_{k+1}}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}f'(x)\,dx \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ *\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{f(a_{k+1})-f(a_k)}{a_{k+1}-a_k}\,dx \quad\cdots\cdots\ **\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_{k+1})-f(a_k)}{a_{k+1}-a_k}\times(a_{k+1}-a_k)\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\{f(a_{k+1})-f(a_k)\}\\
&=f(a_n)-f(a_0)\\
&=f(b)-f(a)
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f(b)=f(a)+\int_a^b f'(x)\,dx$$

(注) * までは全ての n に対して成り立つ. ** からは $a_{k+1}-a_k$ が無限小になるような n に対して成り立つ.

あるいは, 次のようにしてもよい.

$$\begin{aligned}
&f(b)-f(a)\\
&=f(a_n)-f(a_0)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\{f(a_k)-f(a_{k-1})\}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(a_k)-f(a_{k-1})}{a_k-a_{k-1}}\times(a_k-a_{k-1}) \quad\cdots\ ***\\
&=\sum_{k=1}^{n}f'(a_k)(a_k-a_{k-1}) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ****\\
&=\int_a^b f'(x)\,dx \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\ \text{定積分の定義より}
\end{aligned}$$

(注) *** までは全ての n に対して成り立つ. **** からは a_k-a_{k-1} が無限小になるような n に対して成り立つ.

(ト) テイラー展開を導く

(ヘ)を $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, …… に使って

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$f'(x)=f'(a)+\int_a^x f''(t)\,dt \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$f''(x)=f''(a)+\int_a^x f'''(t)\,dt \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

① に ② を代入して

$$\begin{aligned}
f(x)&=f(a)+\int_a^x\left\{f'(a)+\int_a^x f''(t)\,dt\right\}dt\\
&=f(a)+\int_a^x f'(a)\,dt+\int_a^x\!\!\int_a^x f''(t)\,dt\,dt\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots ④
\end{aligned}$$

④ に ③ を代入して

$$\begin{aligned}
f(x)&=f(a)+\int_a^x f'(a)\,dt\\
&\quad+\int_a^x\!\!\int_a^x\left\{f''(a)+\int_a^x f'''(t)\,dt\right\}dt\,dt\\
&=f(a)+f'(a)\int_a^x dt+f''(a)\int_a^x\!\!\int_a^x dt\,dt\\
&\quad+\int_a^x\!\!\int_a^x\!\!\int_a^x f'''(t)\,dt\,dt\,dt\\
&=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2\,!}f''(a)(x-a)^2\\
&\quad+\int_a^x\!\!\int_a^x\!\!\int_a^x f'''(t)\,dt\,dt\,dt
\end{aligned}$$

以下同じように代入していくことによって

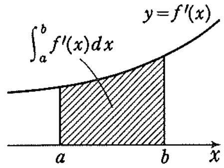
$$\begin{aligned}
f(x)&=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2\,!}f''(a)(x-a)^2\\
&\quad+\frac{1}{3\,!}f'''(a)(x-a)^3+\cdots\cdots
\end{aligned}$$

(チ) $f'(x)>0$ なら単調増加である

$f'(x)>0$ なので

$a<b$ のとき, 右図より

$$\int_a^b f'(x)\,dx>0$$



$$\begin{aligned}
\therefore\quad &f(b)-f(a)\\
&=\int_a^b f'(x)\,dx>0
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f(a)<f(b)$$

(リ) $f'(a)=0$, $f''(a)>0$ なら $x=a$ で極小

(ト) より

$$\begin{aligned}
f(x)&=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2\,!}f''(a)(x-a)^2\\
&\quad+\frac{1}{3\,!}f'''(a)(x-a)^3+\cdots\cdots\\
&=f(a)+\frac{1}{2\,!}f''(a)(x-a)^2\\
&\quad+\frac{1}{3\,!}f'''(a)(x-a)^3+\cdots\cdots\\
&=f(a)+\frac{1}{2\,!}f''(a)(x-a)^2\\
&\qquad\cdots\cdots\ x=a\ \text{の十分近くで}\\
&\geqq f(a) \qquad\qquad \because\ f''(a)>0
\end{aligned}$$

つまり, $x=a$ で極小値をとる.

(ヌ) 等速度運動の公式を導く

x 軸上を等速運動する質点を考え，t 秒後の位置を $x=f(t)$ とすると

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{一定}$$

$$\therefore \quad x=f(t)=f(0)+\int_0^t f'(t)\,dt$$
$$=a+\int_0^t v\,dt$$
$$=a+vt$$

(ル) 空間における直線の方程式

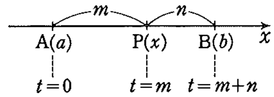
直線上の任意の1点を $P(x,\ y,\ z)$ とする．点Pは等速度運動をする質点の座標と思えるので，(ヌ)を使って

$$\begin{cases} x=x_0+ut \\ y=y_0+vt \\ z=z_0+wt \end{cases}$$

と書ける．

(ヲ) 内分の公式を導く

$A(a)$，$B(b)$ を $m:n$ に内分する点 $P(x)$ を求めるのに，点Pを直線 AB 上を等速運動している質点だと考える．$t=0$，m，$m+n$ 秒後に，A，P，B にいるとすると



$$v=\frac{b-a}{m+n}$$

m 秒後にPにいるので，$x=a+vt$ を使って

$$x=a+\frac{b-a}{m+n}\cdot m=\frac{na+mb}{m+n}$$

列挙するのはこの位にして，次に全体の関連図を書きます．(下図)

4．最後に

何はともあれこういう調子で，僕が本当に教えてあげたい事を絞り出している所です．

(岡崎城西高等学校)

「$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$」ファミリー