数学研究の実践

吉光(よしみつ) 章喜(しょうき)

1．はじめに

誰でも教材研究をするけれども，私の場合は更に他から学ぶことにより，問題の端緒を把握し，研究として深化させることが多いことを自覚している．

学ぶ相手は指導する生徒であったり，他の先生であったりする．したがって，自然の帰結として，授業や研修には十分関心を寄せざるを得ない．

この紙面を借りて私のささやかな研究実践例を記述し，数学研究は如何にして成り立ち，如何にして成就するのか考察してみたい．この種の考察も数学教育の指導上有意義ではないだろうかと考える．

2．研究の実践例（主として動機づけについて）

（1） $\sum_{k=1}^{n} k^i$ の図形的証明をめぐって

和 $\sum_{k=1}^{n} k^i$ の一般的証明は知られている．教科書で扱う証明の多くは，二項定理を利用する証明と数学的帰納法に負う証明とである．前者は求める和の n に関する多項式が構成的に得られるのに対して，後者は，前もって求める和の n に関する多項式が得られていない限り証明を進めることはできない．

和 $\sum_{k=1}^{n} k^i$ の証明には他にもさまざまな証明があり，その多くはいわゆる図形的な工夫をこらしたものである．これらは図形上の推論から証明すべき和の式を構成し，厳密に言えば，そこで得た式を数学的帰納法で真なることを証明するのである．そしてこれらの証明は数学的帰納法の欠陥ともいうべき，証明しなければならない式そのものを構成可能という意味で，数学的帰納法を補てんしている．考察の自然の進展として，それでは $\sum_{k=1}^{n} k^i$ の図形的証明にはどのようなものがあるか調査してみたいと考えた．以下

$B_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots\cdots+n^k$ とする．

研究の経過は次のようである．

1° $B_1(n)$ の図形的証明
- ① ピタゴラス学派の図形的証明
- ② 少年ガウスの図形的証明

2° $B_2(n)$ の図形的証明
- ① 土師 政雄氏の証明
- ② コロソフの証明

3° $B_3(n)$ の図形的証明
- ① コロソフの証明
- ② 高橋 潤一郎氏の証明
- ③ アル・カーシーの証明

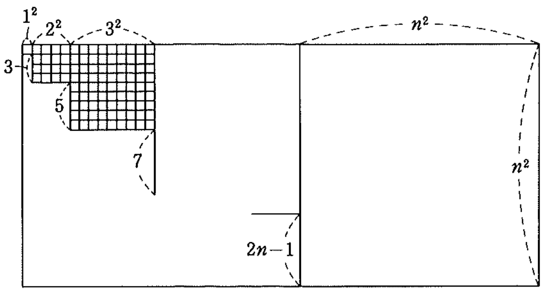
図形的証明の代表的系譜は以上のようである．しかし，$B_k(n)$，$(k\geqq 4)$ の図形的証明は遺憾ながら著者の調査の範囲内では見当たらなかった．たまたま，昭和57年度の東北地区算数・数学教育研究（福島県）大会に出席する機会があり，第3分科会で研究発表された青森県立六ヶ所高等学校の須藤 圭一先生がベルヌーイ数に関する話題を提供され多項式 $B_k(n)$ を論じておられたので，著者の腐心している第3の証明に関して質問してみたがご存知ないとのことだった．そこで，自力で $B_4(n)$ の図形的証明を考察してみようと考えた．

発表資料に詳述しているように，$B_4(n)$ の図形的証明を得てみると同じ着想から $B_2(n)$，$B_3(n)$ の図形的証明はもちろんのこと，$B_k(n)$ の図形的かつ一般的証明が可能になるのであるが，その当時は夢にも思わず，ひたすら $B_4(n)$ の図形的証明を模索することになった．結局下図の図形的証明を得るまで何と10ヶ月もかかることになったのである．

（以上の引用は，日本数学教育学会誌　第67巻第7号による．）

$B_4(n)$ の図形的証明（1982. 8. 9）

下図の長方形について



横の長さ

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

縦の長さ n^2

上記の研究の発表後，関連する興味深い話題が次の3個であるので記す．

① $\sum k^2$ と $\sum k^3$ とについて

―― 新しい図形的証明と代数的証明 ――

鹿児島高専　白坂 繁

日本数学教育学会誌　第69巻　特集号　1987

② 図形で公式を導く

京都大学　一松 信

数学セミナー　日本評論社　02—87

③ 昭和62年度　新潟大学　教育学部

入試問題　3番

（2） 有名な不等式に関する初等的証明とその指導案

考察の動機は次のようであった．

問題「実数 a, b, c が,

$a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$, $abc>0$

を満足していれば，$a>0$, $b>0$, $c>0$ であることを示せ．」

この証明に関する模範例として次の二つを挙げる．

証明 I）

$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$

$\quad =x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

を考える．

$x\leqq 0$ のとき，

$a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$, $abc>0$ より，

$x^3\leqq 0$, $-(a+b+c)x^2\leqq 0$, $(ab+bc+ca)x\leqq 0$

であるから　$f(x)\leqq -abc<0$

つまり，$x\leqq 0$ では　　$f(x)<0$

よって，$f(x)=0$ は，$x\leqq 0$ に解をもたない．

$f(x)=0$ の解 a, b, c は0以下でない．すべて正である．

$\therefore$　$a>0$, $b>0$, $c>0$　　（終）

証明 II）

$a+b+c>0$　……………… ㋐

$ab+bc+ca>0$　……………… ㋑

$abc>0$　……………… ㋒

㋒ より (A) a, b, c は共に正

または

(B) a, b, c は1個正，2個負

のいずれかである．

(B) とすると，$a>0$, $b<0$, $c<0$ としても一般性を失わない．

㋑ より　$bc>-(b+c)a$ …… ㋑′

㋐ より　$a>-(b+c)$

$-(b+c)$ (>0) を上の両辺に乗ずると

$-a(b+c)>(b+c)^2$ …… ㋓

㋑′ と ㋓ より　$bc>(b+c)^2$

$\therefore$　$b^2+bc+c^2<0$　　$\therefore$　$\left(b+\frac{c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}c^2<0$

b, c は実数だからこれは不合理である．したがって (B) は成立しない．よって (A) すなわち，

$a>0$, $b>0$, $c>0$ である．　（終）

以上の2例は基本的には間接証明法である．著者の直接的証明は次のようである．

証明）―― 1985. 3. 19 ――

次の恒等式を考える．

$a(ab+bc+ca+a^2)=abc+a^2(a+b+c)$

㋐ と ㋒ より右辺は正である．また左辺の括弧内も ㋑ より正である．したがって $a>0$ である．

$b>0$, $c>0$ も同様に示される．　（終）

教科書によくある下記の例題を上記の最後の証明の構想のもとに示せば以下のようになる．

「実数 a, b に対して $a+b>0$, $ab>0$ が成立するならば，$a>0$, $b>0$ である．」

証明）

恒等式　$a(a+b)=a^2+ab$

右辺は正．左辺の括弧内も正．

したがって　　$a>0$

$b>0$ も同様に示される．　（終）

（日本数学教育学会誌　第5号に掲載予定）

尚，この研究の発端は次のようであった．昭和59年，第66回全国算数・数学教育研究（福井県）大会高等学校部会の分科会において，富山県高岡高校の西尾 孜先生が，「不等式の研究」（大学入試問題を中心として）という演題で研究発表された．昭和31年から昭和59年の大学入試問題を中心に，不等式を核に，足かけ28年に亘る労作であった．発表資料は電話帳を連想させる厚味があった．感動させられた．その後，半年程して，上記の論考で扱うことになる不等式の問題に気が付き，西尾先生の「不等式の研究」をひもといたのであるが見当たらないのであった．それでは自分で試みようというのが，動機となった．「不等式の研究」を知らなければ，上記の論考もなかったかもしれない．西尾先生に感謝しないではいられない．（引用　同上）

（3） 自然三角形の研究

自然三角形という学術用語は存在しない．そこで私なりに自然三角形を下記のように定義している．３辺の長さがすべて自然数であり，かつ三つの角のすべてが，六十進法の角度の意味で自然数であるときに限り，その三角形を自然三角形と定義するのである．

研究の動機は次のようである．数学Ⅰの三角比の章における指導の際に，その応用として余弦定理を扱うけれども，この例題群を説明する頃に気が付くことがあった．いわゆる三角形を解く問題の多くの三角形において，３辺がすべて自然数であるが，角度を求めると六十進法の意味で自然数であることができない場合がほとんどであり，逆に六十進法の意味で角度がすべて自然数であるけれども，今度は３辺の長さがすべて自然数であるわけにはいかない場合がほとんどであるという事実に着目したのである．それでは，すべての辺が自然数でありかつすべての角が六十進法の意味で自然数になるような三角形が存在するのだろうかという疑問が湧いたのである．生徒に直接問いかけると正三角形という返事である．なる程，しかし，正三角形に限るのだろうか？かくて定式化された問題が，「自然三角形は正三角形に限るか？」であり，私は昭和61年の秋頃までにこの命題が真であるという証明を得，もっとエレガントな証明を工夫できるのではないだろうかと暖めていたのである．

ところが，昭和62年度に福岡県で全国算数・数学教育研究大会が開催された際に配布された「九州数学教育会情報　第119号」の中に，福岡県立門司北高等学校の松田 康雄先生が「すっきりした三角形」という考察を発表されており，私のいう自然三角形を細大もらさず考究されたのであった．同じ着想，同じ結果を得ている人物が居たのであった．

尚，上記の全国大会において，高等学校部会基礎解析部門 11－1 で「$\tan\theta$ の特殊値について」を発表された鹿児島高専の白坂 繁先生の内容は自然三角形を考察する上での本質的な根拠と思われた．

（4） 三平方の定理の逆の研究

考察のねらいは次のようである．

周知のように「三平方の定理」とは，$\triangle ABC$ において，$\angle BAC=\angle R$ ならば，$BC^2=AB^2+AC^2$ なる命題を言い，「三平方の定理の逆」とは，$\triangle ABC$ において，$BC^2=AB^2+AC^2$ ならば，$\angle BAC=\angle R$ であることを主張する命題である．

ところで，「三平方の定理」の証明は古来数多く在り，現在でも新しい証明が発見され，証明の仲間入りをしているのであるが，「三平方の定理の逆」の証明はユークリッド以来その個数は僅少である．

それでは，僅少とはいえ「三平方の定理の逆」の証明にはどのような種類のものがあるのか，どのような特徴づけがそれらの証明の中に隠れているのか，またそもそも，なぜ「三平方の定理の逆」の証明は難しいのか等を考察し，出来ることならば「三平方の定理の逆」の新しい証明を工夫したい．

幸運にも私は，1987．9．8に「三平方の定理の逆」の新しい証明を得たのであるけれども，発展的諸問題や指導案の作成，更には上記新しい証明の意義等の考察が未だ不十分であり，いずれ世に問いたいと考えている状況である．

この研究の動機となったのは，本県研修センターに２年前に三平方の定理の諸証明を問い合わせた際，ほとんどの教科書に掲載されている三平方の定理の証明が，二千年以上前のユークリッドの

証明に依存していることが判って不思議になったことなのであった．

3．研究推進の条件（主としてテーマの精錬について）

冒頭に記述したように実践例を振り返ってみるにつけても，教育現場における様々な場面は研究課題の金鉱を思わせる．あるときは指導法のヒントを与えもするし，またあるときは貴重な問題を提起することもあり得る．教員どうしの教科に関する話題から興味ある事実に思い至ることもあった．

（1） 指導者の存在

私は自分の疑問を自分なりに検討した後に決まって先輩諸氏に指導を仰いできた．本県にはそのような指導者諸氏がおり，私は恵まれていると思っている．大学の先輩や教科指導の諸先輩は私の拙考に関して適切な指針をいつも与えてくれた．多くの研究テーマが洗練されて，その中の二・三が残される．

（2） 自分の力量に相応しい問題

自分の体に相応しい服装があるように，自分の力量をはるかに越える問題は手に負えないことがある．この考察では四つの実践例を挙げたのであるけれども，約10年間の所産であり，2年に一つあるいは二つの自分なりのテーマを把握すれば良い方である．自分の力量を越えているテーマはこの10年手つかずのままである．

（3） こころに宿るもの

私はもっと若い頃，多忙は研究推進の障害になると思っていた．しかし，宮城県のある校長は多忙だからこそ良い仕事が残せると言った．これは本当かもしれない．私が現在奉職している高校は創立6年目であり実際多忙であるけれども，研究推進の意味ではむしろ多産であった．私は通常，問題の端緒を捉えると半年から1年間はこころに暖めているのであり，機が熟すると校務後に集中するのである．多忙だからと言ってもこころに宿ったものは忘れることはない．研究の成就する時期が3月であったり，9月，12月，8月であったり不定であるけれども機の熟する時は誰でも自覚する筈である．

（4） 多産の条件

世の中には私をはるかに凌駕する人物が多数居ることは承知している．私は研究心旺盛な人物にその多産の秘訣を常々教わりたいと願っている．私は次のような野球人のエピソードを知って，これも多産の秘訣の一つではないかと考えている．巨人軍の打撃コーチ山内 一弘氏は選手にイメージ・バッティングなるものを指導していると聞く．それは一つの試合が終わった途端に，帰り支度の時から既に，明日の試合に出場予定とされる相手チームの投手の投球の組立てをイメージし，自分の打撃を想定することのようである．かくして各選手はそれに従って，試合が終わるとすぐ次のイメージづくりにかかるというわけである．原選手が急に打撃に開眼してきたようにみえたのはイメージ・バッティングの指導効果かもしれない．

私は自分の研究発表は，発表の半年位以前に印刷も仕上げてしまい，明日発表するのも可能という状態にして置かないと気持ちが許さない．またそうしないとどんな校務が舞い込んで来るか判らないからである．そして発表までの期間中に新しいテーマの渉猟を心懸けている．これが私のイメージ・バッティングである．

（5） テーマの所在

これまでの教員生活を振り返ると，初めの何年間かは大学生の頃に着想していたものを頼りにしていたような気がするのである．言ってみれば大学生の頃の貯金を使っていたようなものであるが，この考察に述べる研究の前のテーマの頃から自分のテーマがいつも教育現場から採集するようになった自己に思い至ってならない．しかも数学の教科目で言えば，基礎解析，数学Ⅰ，中学校の数学という風にむしろ初等教育の方へ関心が傾斜しているようである．

対象に新しい視点を与えるというのは難しいことである．教科書の内容は数学科の教師ならば誰でも熟知していることではあるけれども，使い古されたテーマを新しく見直すには，意外かもしれないが私達の教えている生徒諸君のように新鮮な気持ちで向かうことが必要なのかもしれない．だから生徒諸君がむしろ私達に貴重な観点を示唆することがあるのかもしれない．また熱心な教師が私達にヒントを与える理由なのかもしれない．　（終）

（宮城県泉館山高等学校）