背理法の定義について

塩見　浩三

数研出版の「数学Ⅰ」の教科書では106頁に，$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明を例にして

> “背理法”とは「ある事柄を証明するのに，まずその事柄が成り立たないと仮定して矛盾を導き，それによって事柄の成り立つことを証明する方法」である．

と書いています．

また，**対偶** については，186頁に

> 1 命題の真偽は，その対偶の真偽と一致する．
> 2 命題 $p \Longrightarrow q$ が真であることを示すために，その対偶 $\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$ が真であることを示してもよい．

と書いています．

また，他の参考書には，“背理法”とは「証明すべき結論を否定して論理を進めていき，与えられた条件と対立する結論を導き出して矛盾（不合理）を示す一つの証明方法である」と書いています．

対偶命題を（直接）証明する方法を，私は「**対偶法**」と呼ぶことにしてはどうかと大学生頃から考えている．というのは“背理法”と“対偶法”とは証明の構造が根本的に異なるからである．

図示すると，命題「A ⟶ B」を証明するのに

＜背理法＞	＜対偶法＞
$\left.\begin{matrix}\mathbf{A}\\ \overline{\mathbf{B}}\end{matrix}\right\}$ **仮定 ⟶ 矛盾**	「$\overline{\mathbf{B}} \longrightarrow \overline{\mathbf{A}}$」

背理法の中に対偶法も含めているのがほとんどの教科書，参考書の書き方である．上の数研出版の教科書の説明も同じである．

しかし，参考書は，対偶法の説明を背理法と考えている．

どちらも間違いではないが，定義がどうもあいまいで，生徒にとって（先生自身にとっても）すっきりしない説明に終わっているのが現状ではないだろうか？

背理法 とは，**A** も $\overline{\mathbf{B}}$ **も仮定** として用いて理論を進め，他の真理（公理，定理，定義）に矛盾することを引き出す証明法であり，**対偶法** とは $\overline{\mathbf{B}}$ **のみを仮定** として理論を進めて，$\overline{\mathrm{A}}$ を導く証明法である．

しかし，対偶法で，後半 $\overline{\mathrm{A}}$ とせずにAと矛盾するとすれば，これも背理法に含めてもよいが，Aと矛盾するから $\overline{\mathrm{A}}$ とすれば対偶法になるのである．

背理法と対偶法とに共通する点は $\overline{\mathrm{B}}$ を仮定とすることであるが，背理法の方が，$\overline{\mathrm{B}}$ と A とを仮定として理論を進めるだけ，思考の自由性は多いといえよう．

また，背理法，対偶法を用いる意義は，直接証明が困難または不可能なときに用いられることであり，$\overline{\mathrm{B}}$ を仮定にすることから，否定命題を否定することにより肯定命題として考察する方が容易である点にある．

したがって，この証明法は，定理の証明，定理の逆の証明，整数問題等で命題に**否定の概念が含まれているときに発想する**ことができるように指導することが特に大切である．

以上のように背理法の定義にもよく分析してみると不十分な点があることに気がつく．

私は背理法と対偶法とは分けて指導する必要があると考えている．それは証明構造，証明の推論の方法に根本的な相異があると考えるからである．

対偶法はむしろ直接証明的傾向が強いのであるが高校教材では，対偶法の発想で $\overline{\mathrm{B}}$ のみから出発してAに矛盾するとする問題がほとんどだから，これを背理法と考えているのであろうが，生徒にとってはやはり，“背理法”が一番わかりにくい証明法であることに変わりはないであろう．

先生方の御意見を楽しみにしています．

（愛媛県立西条高等学校）