2×2 行列の n 乗の求め方

― ケーリー・ハミルトンの定理を中心に ―

塩見（しおみ） 浩三（こうぞう）

数研通信 No. 1 を勉強させてもらいました．青柳先生の 2×2 行列の n 乗の求め方 ― 授業のまとめの中より ― と関連のある内容を 3 年生（理系）の夏休みの補習でやったことがありますので，その一部を例題を中心に紹介してみます．

まとめ

ケーリー・ハミルトンの定理 （CH と略す）

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

(1) $a+d=-1$, $ad-bc=1$ のとき

$$A^2+A+E=O$$

となり，両辺に $(A-E)$ を掛けると

$$(A-E)(A^2+A+E)=O$$

となり，$A^3=E$ となる．

よって $n=3m-2$ のとき $A^n=A$

$n=3m-1$ のとき $A^n=A^2$

$n=3m$ のとき $A^n=E$

(2) $a+d=1$, $ad-bc=1$ のとき

$$A^2-A+E=O$$

となり，$(A+E)(A^2-A+E)=O$, $A^3=-E$, $A^6=E$ となり A^n が求まる．

(3) $a+d=0$ のとき

$$A^2=-(ad-bc)E$$

となり，$-(ad-bc)=k$ とおくと $A^2=kE$ となり

(i) $n=2m-1$ のとき

$$A^n=A^{2m-1}=(A^2)^{m-1}A=k^{m-1}A$$
$$=k^{\frac{n-1}{2}}A$$

(ii) $n=2m$ のとき

$$A^n=A^{2m}=(A^2)^m=k^mE$$
$$=k^{\frac{n}{2}}E$$

(4) $ad-bc=0$ のとき

$$A^2=(a+d)A$$
$$A^n=(a+d)^{n-1}A$$

(5) $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ より

(i) $t^2-(a+d)t+(ad-bc)=0$ が 2 つの異なる実数解 α, β をもつとき

$(A-\alpha E)(A-\beta E)=O$ と変形でき

$A(A-\alpha E)=\beta(A-\alpha E)$ ―― ①

または

$A(A-\beta E)=\alpha(A-\beta E)$ ―― ② となり

① は

$A^2(A-\alpha E)=\beta A(A-\alpha E)=\beta^2(A-\alpha E)$

$A^n(A-\alpha E)=\beta^n(A-\alpha E)$ ―― ③

同様に

$A^n(A-\beta E)=\alpha^n(A-\beta E)$ ―― ④

③－④ から

$(\beta-\alpha)A^n=(\beta^n-\alpha^n)A-\alpha\beta(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1})E$

$\alpha\neq\beta$ より

$$A^n=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}A-\frac{\alpha\beta(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1})}{\beta-\alpha}E$$

(ii) $\alpha=\beta$（重解）のとき

$(A-\alpha E)^2=O$ より

$$A(A-\alpha E)=\alpha(A-\alpha E)$$

よって $A^{n-1}(A-\alpha E)=\alpha^{n-1}(A-\alpha E)$

∴ $A^n-\alpha A^{n-1}=\alpha^{n-1}(A-\alpha E)$ ―― ①

n を $n-1$ に替え，両辺を α 倍し，これを繰り返すと

$\alpha A^{n-1}-\alpha^2A^{n-2}=\alpha^{n-1}(A-\alpha E)$ ―― ②

$\alpha^2A^{n-2}-\alpha^3A^{n-3}=\alpha^{n-1}(A-\alpha E)$ ―― ③

⋮

$\alpha^{n-3}A^3-\alpha^{n-2}A^2=\alpha^{n-1}(A-\alpha E)$ ―― ($n-2$)

$\alpha^{n-2}A^2-\alpha^{n-1}A=\alpha^{n-1}(A-\alpha E)$ ―― ($n-1$)

① から (n−1) まで辺々加えると

$A^n-\alpha^{n-1}A=(n-1)\alpha^{n-1}(A-\alpha E)$ となり

$A^n=n\alpha^{n-1}A-(n-1)\alpha^nE$

なお，青柳先生の $p.4$ の別解のように

(i) 異なる 2 実数解 α, β をもつときは

$A^n=(A-\alpha E)(A-\beta E)Q(A)+aA+bE$

とおき

$A=\alpha E$ とおくと　$\alpha^nE=(a\alpha+b)E$

$A=\beta E$ とおくと　$\beta^nE=(a\beta+b)E$

ゆえに $\begin{cases} a\alpha+b=\alpha^n \\ a\beta+b=\beta^n \end{cases}$

これを解いて

$$a=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha},\quad b=-\frac{\alpha\beta(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1})}{\beta-\alpha}$$

$$\therefore\quad A^n=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}A-\frac{\alpha\beta(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1})}{\beta-\alpha}E$$

(ii) $\alpha=\beta$ (重解) のとき

A と E のみなら交換法則が成立し，文字と同じに扱ってよいから

$x^n=(x-\alpha)^2Q(x)+ax+b$ —— ① とおいて

$x=\alpha$ とおくと　$\alpha^n=a\alpha+b$ —— ②

① の両辺を x で微分して

$nx^{n-1}=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)+a$

$x=\alpha$ とおくと　$n\alpha^{n-1}=a$ —— ③

②, ③ より　$b=\alpha^n-n\alpha^n=(1-n)\alpha^n$

よって余りは　$n\alpha^{n-1}x-(n-1)\alpha^n$

行列 A^n に適用すると

$A^n=(A-\alpha E)^2Q(A)+aA+bE$

とおいて，$(A-\alpha E)^2=O$ より

$A^n=n\alpha^{n-1}A-(n-1)\alpha^nE$

具体例

① 数研通信 No. 1 $p.1$ の (4)

$\boxed{A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$ は $a+d=0$ より　$A^2=-E$

となり，まとめ (3) の例になる．

$A^4=E$ より，$n=4k-3$, $4k-2$, $4k-1$, $4k$ で場合分けとなる．

② $\boxed{A=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$ は $ad-bc=0$

まとめ (4) の例である．

$A^2=\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}=2A\quad(a+d=2)$

よって　$A^n=2^{n-1}A$

$=2^{n-1}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2^{n-1} & -3\cdot2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3\cdot2^{n-1} \end{pmatrix}$

③ 定数 a, p, q に対して，次のように x_n, y_n の列を作る．

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-a & -1-a \\ -1+a & -1+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

(2) $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$ のとき，$\lim_{n\to\infty}x_n$, $\lim_{n\to\infty}y_n$ を求めよ．

[(1) は省略]　(京都大 62)

$(1-a)+(-1+a)=0$ より，まとめ (3) の例である．

$A=\begin{pmatrix} 1-a & -1-a \\ -1+a & -1+a \end{pmatrix}$ とおくと

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix}=\cdots=A^{n-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

また CH より　$A^2=2(1-a)E$

$2(1-a)=k$ とおくと　$A^2=kE$

m を正の整数として

(i) $n=2m+1$ のとき

$A^{n-1}=A^{2m}=(A^2)^m=k^mE$

$\therefore\ \begin{pmatrix} x_{2m+1} \\ y_{2m+1} \end{pmatrix}=k^m\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=k^m\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

(ii) $n=2m$ のとき

$A^{n-1}=A^{2m-1}=(A^2)^{m-1}A=k^{m-1}A$

$\therefore\ \begin{pmatrix} x_{2m} \\ y_{2m} \end{pmatrix}=k^{m-1}A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=k^{m-1}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$ より　$-1<k<1$

$\therefore\ \lim_{m\to\infty}k^m=0,\ \lim_{m\to\infty}k^{m-1}=0$

したがって

$\lim_{m\to\infty}x_{2m+1}=\lim_{m\to\infty}y_{2m+1}=\lim_{m\to\infty}x_{2m}=\lim_{m\to\infty}y_{2m}=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}x_n=0,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=0$

④ $\boxed{A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$ のとき，A^n を求める．

(5)の異なる2実数解の例である．

(解1) CH より $A^2-\frac{3}{2}A+\frac{1}{2}E=O$

$2A^2-3A+E=O$, $(2A-E)(A-E)=O$

$A(A-E)=\frac{1}{2}(A-E)$ より

$$A^n-A^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(A-E) \qquad \text{——①}$$

$A\left(A-\frac{1}{2}E\right)=1\left(A-\frac{1}{2}E\right)$ より

$$A^n-\frac{1}{2}A^{n-1}=A-\frac{1}{2}E \qquad \text{——②}$$

②×2－① より　（連立させて解く）

$$A^n=(2A-E)-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(A-E)$$

$$=\begin{pmatrix} -2^{1-n}+3 & -2^{1-n}+2 \\ 3\cdot2^{-n}-3 & 3\cdot2^{-n}-2 \end{pmatrix}$$

(解2) ①のみで解く．

$A(A-E)=\frac{1}{2}(A-E)$ より

$$A^2-A \quad =\frac{1}{2}(A-E)$$

$$A^3-A^2 \quad =\left(\frac{1}{2}\right)^2(A-E)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$A^n-A^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(A-E)$$

辺々を加えて

$$A^n-A=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k(A-E)$$

$$=\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^n=-2^{1-n}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -2^{1-n}+3 & -2^{1-n}+2 \\ 3\cdot2^{-n}-3 & 3\cdot2^{-n}-2 \end{pmatrix}$$

(解3) ②のみで解く．

$$A^n-\frac{1}{2}A^{n-1}=A-\frac{1}{2}E$$

n を $n-1$ に替え両辺を $\frac{1}{2}$ 倍し，これを繰り返すと

$$\frac{1}{2}A^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^2A^{n-2}=\frac{1}{2}\left(A-\frac{1}{2}E\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2A^{n-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3A^{n-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(A-\frac{1}{2}E\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}A^2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}A=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(A-\frac{1}{2}E\right)$$

辺々を加えて

$$A^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}A=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}\left(A-\frac{1}{2}E\right)$$

$$=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\left(A-\frac{1}{2}E\right)$$

$$\therefore\ A^n=2A-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}A+\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right\}E$$

$$=(2A-E)-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(A-E)$$

＝以下（解1）に同じ．

⑤ $\boxed{A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}}$ のとき，A^n を求める．

(5)の重解の例である．

(解1) CH より $A^2+2A+E=O$

数学的帰納法で解く．

$A^2=-2A-E$

$A^3=-2A^2-A=4A+2E-A$

$\quad =3A+2E$

$A^4=3A^2+2A=-6A-3E+2A$

$\quad =-4A-3E$

$\vdots$

$A^n=n(-1)^{n-1}A+(n-1)(-1)^{n-1}E$

と推測する．

証明

(I) $n=2$ のとき，$A^2=-2A-E$ で成立する．

(II) $n=k$ のとき成立すると仮定すると

$$A^k=k(-1)^{k-1}A+(k-1)(-1)^{k-1}E$$

$n=k+1$ のとき

$A^{k+1}=k(-1)^{k-1}A^2+(k-1)(-1)^{k-1}A$

$\quad =k(-1)^{k-1}(-2A)-k(-1)^{k-1}E$

$\qquad +(k-1)(-1)^{k-1}A$

$\quad =-(k+1)(-1)^{k-1}A+k(-1)^kE$

$\quad =(k+1)(-1)^kA+k(-1)^kE$

となり，$n=k+1$ のときも成立する．

(I)(II) より

$$A^n=n(-1)^{n-1}A+(n-1)(-1)^{n-1}E$$
$$=(-1)^{n-1}\begin{pmatrix} n & -n \\ 4n & -3n \end{pmatrix}$$
$$+(-1)^{n-1}\begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & n-1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} (2n-1)(-1)^{n-1} & n(-1)^n \\ 4n(-1)^{n-1} & (2n+1)(-1)^n \end{pmatrix}$$

(解2) $(A+E)^2=O$ を変形して

$$A(A+E)=(-1)(A+E)$$
$$A^{n-1}(A+E)=(-1)^{n-1}(A+E)$$
$$\therefore\ A^n+A^{n-1}=(-1)^{n-1}(A+E)$$

nを $n-1$ に替え，両辺に (-1) を掛け，これを繰り返すと

$$(-1)A^{n-1}+(-1)A^{n-2}=(-1)^{n-1}(A+E)$$
$$\vdots$$
$$(-1)^{n-2}A^2+(-1)^{n-2}A=(-1)^{n-1}(A+E)$$

辺々加えると

$$A^n+(-1)^{n-2}A=(n-1)(-1)^{n-1}(A+E)$$
$$\therefore\ A^n=n(-1)^{n-1}A+(n-1)(-1)^{n-1}E$$

=以下同じ

(解3) AとEなら文字と同じに扱ってよいから

$x^n=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ —— ① とおいて

$x=-1$ とおくと $(-1)^n=-a+b$ —— ②

① の両辺を微分して

$$nx^{n-1}=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$$

$x=-1$ とおくと $n(-1)^{n-1}=a$ —— ③

② ③ より

$$b=(-1)^n+n(-1)^{n-1}=(n-1)(-1)^{n-1}$$

行列 A^n に適用すると

$$A^n=(A+E)^2Q(A)+n(-1)^{n-1}A+(n-1)(-1)^{n-1}E$$

$(A+E)^2=O$ より

$$A^n=n(-1)^{n-1}A+(n-1)(-1)^{n-1}E$$

=以下同じ

(解4) 二項定理を用いる．

$$(A+E)^2=O$$

$A+E=B$ とおくと $B^2=O$

$$B=A+E=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$
$$A=B-E=-(E-B)$$

両辺をn乗して

$$A^n=(-1)^n(E-B)^n$$
$$=(-1)^n\{{}_nC_0E^n-{}_nC_1E^{n-1}B+{}_nC_2E^{n-2}\underbrace{B^2}_{O}-\underbrace{\cdots\cdots}_{\text{以下}O}\}$$

$B^2=O$ より

$$A^n=(-1)^n(E-nB)$$
$$=(-1)^n\begin{pmatrix} 1-2n & n \\ -4n & 1+2n \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} (2n-1)(-1)^{n-1} & n(-1)^n \\ 4n(-1)^{n-1} & (2n+1)(-1)^n \end{pmatrix}$$

⑥ $\boxed{A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$ のとき，A^n を求める．

数学的帰納法で A^n を推測，証明してもよいが，二項定理を用いると早い．

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=2E+N$$

とおくと $N^2=O$

$$\therefore\ A^n=(2E+N)^n$$
$$={}_nC_0(2E)^n+{}_nC_1(2E)^{n-1}N$$
$$=2^{n-1}(2E+nN)$$
$$=2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

⑦ 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $a+d=2,\ ad-bc=1$ かつ $b\neq 0$ を満足しているとき，

$A^2=\boxed{}A+\boxed{}E,\quad A^n=\boxed{}A+\boxed{}E,$

$(A^{-1})^n=\boxed{}A+\boxed{}E$

E は単位行列を表す． (慶応大，医 62)

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$
$$\therefore\ A^2=2A-E \quad \text{—— ①}$$
$$(A-E)^2=O$$

$A-E=B$ とおくと $B^2=O$

$A=E+B$ の両辺をn乗して

$$A^n=(E+B)^n$$
$$=E+{}_nC_1B+{}_nC_2B^2+\cdots\cdots$$
$$=E+nB$$
$$=E+n(A-E)$$

$$=nA+(1-n)E$$

A^{-1} が存在するから ① の両辺に A^{-1} を掛けて

$$A=2E-A^{-1}$$

$$\begin{aligned}A^{-1}&=2E-A\\&=2E-(E+B)\\&=E-B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A^{-1})^n&=E-{}_nC_1B+{}_nC_2B^2-\cdots\cdots\\&=E-nB\\&=E-n(A-E)\\&=-nA+(n+1)E\end{aligned}$$

> ⑧ $A=\begin{pmatrix}-4 & -9\\ 4 & 8\end{pmatrix}$ とする．
>
> (1) $A=kE+N$, $N^2=O$ を満たす実数 k と行列 N を求めよ．
>
> (2) A^n を求めよ．

(1) $N=A-kE=\begin{pmatrix}-4-k & -9\\ 4 & 8-k\end{pmatrix}$

$$N^2=\begin{pmatrix}k^2+8k-20 & 18k-36\\ -8k+16 & k^2-16k+28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ k=2,\quad N=\begin{pmatrix}-6 & -9\\ 4 & 6\end{pmatrix}$$

(2) $A^n=(2E+N)^n$

$$\begin{aligned}&={}_nC_0(2E)^n+{}_nC_1(2E)^{n-1}N\\&\quad+{}_nC_2(2E)^{n-2}N^2+\cdots\cdots\\&=2^nE+n\cdot2^{n-1}N\quad(\because\ N^2=O\ より)\\&=2^{n-1}\begin{pmatrix}2-6n & -9n\\ 4n & 2+6n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

以上高校生にはやや程度は高いがパターンとして一度理解しておくと行列もそうこわがらないと思う．

固有値，固有ベクトルとともにケーリー・ハミルトンの利用による A^n の求め方は理系には必ず指導しておきたい事項である．最近の大学入試の傾向としてもケーリー・ハミルトンにより A^n を求める傾向が強い．生徒にとって体系的に理解が出来ていない分野なので一度はまとめて理解させたいと思いここ数年，以上のような指導をしてきた．

次回には数列の漸化式を中心に連立漸化式と行列 A^n の関連などについて指導していることを発表してみたいと考えている．

（愛媛県立今治西高等学校）