Series ～ 指導の具体例

2×2行列の対角化とその応用

青柳(あおやぎ)　龍彦(たつひこ)

勤務校で研究授業を命じられました．教科書以外の内容でやれとのことで，2×2 行列の対角化についての授業をすることにしました．対象は国立理系 2 年のクラスです．次のような研究授業用資料を作成しましたが，実際の授業では相当端折って喋っております．しかし，一応，２次曲線の標準形化の応用まで話すことが出来ました．

〔資　　料〕

§1．行列の対角化

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ のような行列を対角行列という．

一般に，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ という行列をその行列に固有な形で $A \longrightarrow B=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ と対角行列に変形することを行列の対角化という．

まず行列Aを対角化する方法を学ぼう．

$$A\vec{x}=k\vec{x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

を満たす$\vec{0}$でない $\vec{x}$ を行列Aの固有ベクトル，数kをAの固有値という．これを求めると行列Aが対角化できることが分っている．(1) を次の形で書く．

$\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ として，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)'$$

$$k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kx+0y \\ 0x+ky \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

だから $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots (1)''$$

ここで，$\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}$ が逆行列をもつとすれば，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

この対偶をとって，ベクトル方程式 (1)″ が $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ なる解をもつためには，$\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}$ が逆行列をもたなければよい．ゆえに，次のkについての方程式（固有方程式という）

$$\begin{aligned} \Delta&=(a-k)(d-k)-bc \\ &=k^2-(a+d)k+ad-bc=0 \end{aligned}$$

が成り立てばよい．この解 k_1, k_2 が固有値である．何となれば，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して，k_1, k_2 が (1)″ を満たすからである．

$k_1 \neq k_2$ とする．$k=k_1$ のとき (1)″ を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$（固有ベクトルである）とし，$k=k_2$ のときの固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とし，$P=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ とおけば，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ であることが分っている．

これが行列の対角化の方法である．これを具体例でやろう．

（例１） $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ を対角化せよ．

解） $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$i.e. \quad \begin{cases} (3-k)x+y=0 \\ x+(3-k)y=0 \end{cases}$$

とおく．固有方程式は

$$\begin{aligned} \Delta&=k^2-(3+3)k+3\times3-1\times1 \\ &=(k-2)(k-4)=0 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad k=2,\ 4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$k=2$ のとき　$x+y=0$

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$　$(t\neq 0)$

$k=4$ のとき　$x-y=0$

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}$　$(s\neq 0)$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{簡単のため，} s=t=1 \text{ とし，}^{*)} \\
P=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\text{とおくと}\quad P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\therefore\ P^{-1}AP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\qquad =\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}\right\}(**)$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

これで，$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ が $P^{-1}AP$ で対角行列になった．すなわち，対角化ができたことになる．

註1） ところで，(2), (3) を比較すると，$k_1=\alpha$, $k_2=\beta$ ではないかと思われる．これを確かめよう．

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

の左からPを掛けると　$AP=P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\ \ A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \alpha x_1 & \beta x_2 \\ \alpha y_1 & \beta y_2 \end{pmatrix}$$

分解して　$A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

これは，α, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$；$\beta$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ がそれぞれ (1)（または (1)′）を満たすことを示している．すなわち，固有値αのときの固有ベクトルが $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$，固有値$\beta$のときの固有ベクトルが $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ である．

$$\therefore\quad k_1=\alpha,\ \ k_2=\beta$$

したがって，$P=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ とすれば，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

であることが分った．したがって，(**) の所の計算は省略して，結果 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ を直ちに出していいことになる．

註2） 次に，*）の所で簡単のためにという理由で，$s=t=1$ とおいたが，s, t の値が別の値のときには $P^{-1}AP$ が別の行列になりはしないかと疑問をもつ人もいるでしょう．これについて説明を加える．

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$ $(t\neq 0)$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}$ $(s\neq 0)$

のままで計算してみよう．

$Q=\begin{pmatrix} t & s \\ -t & s \end{pmatrix}$ とおくと　$Q^{-1}=\frac{1}{2ts}\begin{pmatrix} s & -s \\ t & t \end{pmatrix}$

$$Q^{-1}AQ=\frac{1}{2ts}\begin{pmatrix} s & -s \\ t & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & s \\ -t & s \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2ts}\begin{pmatrix} 2s & -2s \\ 4t & 4t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & s \\ -t & s \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2ts}\begin{pmatrix} 4st & 0 \\ 0 & 8st \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

この結果は $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおいたときの $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ に等しい．したがって，計算の簡易化のため $s=t=1$ とおいても構わないことになる．これは一般の行列Aの場合についてもいえる．

註3） 上の議論は固有方程式

$$\Delta=k^2-(a+d)k+ad-bc=0$$

の解 k_1, k_2 が $k_1\neq k_2$ の場合である．$k_1=k_2$ の場合はどうなるであろうか．次の例で考えてみよう．

(例2)　$A=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ は対角化できるか．

説明） $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$i.e.\quad \begin{cases} (-3-k)x-2y=0 \\ 2x+(-7-k)y=0 \end{cases}$$

とおく．固有方程式は

$$\Delta=k^2+10k+25=(k+5)^2=0$$

$$\therefore\quad k=-5\ \ \text{（重解）}$$

このとき　$x-y=0$

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$　$(t\neq 0)$,

$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ で P^{-1} が存在しない．したがって，

前述の方法では判断できない．この場合は，

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき $P=\begin{pmatrix} k-d & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ とおけば，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

となることが分っていて，これは対角化できないことも分っている．(証明は難しいので省略する．)

解) $P=\begin{pmatrix} -5-(-7) & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

とすると，$P^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP&=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 10 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるが，上の説明中の定理より対角化はできない．

説明) $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ の形の行列を三角行列といい，この形に直すことを行列の三角化という．上の例で見たように，行列によっては三角化はできるが，対角化はできないものもあるのである．しかし，このタイプが入試に生の形で出題されることはないであろう．

§2．(対角化の応用1) 2×2行列 A の n 乗 A^n を求める一方法

この section と次の section では 2×2 行列の対角化の応用を考えよう．まず上の題で，具体的例を考える．

(例3) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，A^n を求めよ．

解) 例1の結果より，$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば

$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ で　$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

これをBとおくと

$$B^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{pmatrix}$$

$$B^3=B^2B=\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 4^3 \end{pmatrix}$$

以上より類推して　$B^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$

ところで

$$\begin{aligned} B^n&=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots\cdots(P^{-1}AP) \\ &=P^{-1}AEAE\cdots\cdots EAP=P^{-1}A^nP \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad A^n&=PB^nP^{-1} \\ &=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n & 4^n \\ -2^n & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4^n+2^n & 4^n-2^n \\ 4^n-2^n & 4^n+2^n \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 2\cdot4^{n-1}+2^{n-1} & 2\cdot4^{n-1}-2^{n-1} \\ 2\cdot4^{n-1}-2^{n-1} & 2\cdot4^{n-1}+2^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

§3．(対角化の応用2) 2次曲線の標準形化の一方法

2次曲線 $ax^2+2hxy+by^2=c$　を標準形 $a'x^2+b'y^2=c$ に直すことを考えよう．

$$(x\quad y)\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を計算すると $ax^2+2hxy+by^2$ になるから，これが対角化できて，

$$(x\quad y)\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

になればよい．ところで，ここに注意すべきことが1つある．それは固有ベクトルを任意にとっていいかということである．これを考えてみよう．

原点の回りの θ 回転によって，

$(x\quad y)\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=c$ 上の点 $(x,\ y)$ が $(x',\ y')$ に移ったとすれば

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} x'\cos\theta+y'\sin\theta \\ -x'\sin\theta+y'\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} (x\quad y)&=(x'\quad y')\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &=(x'\quad y')\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

これを原2次曲線の方程式に代入すると

$$(x' \quad y')\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=c$$

この真中の部分は $P^{-1}AP$ で $A=\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおいたものに相当している.

したがって, $P=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ で固有ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ が直交単位ベクトルになっていなければならない ($\because$ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, 内積$=\cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta=0$) ということである. ところが,

(1) $A=\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ のとき, 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ である.

$\because$ $\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ の固有方程式 $k^2-(a+b)k+ab-h^2=0$ の解を k_1, k_2 (固有値) とすると,

$(a-k)x+hy=0$ より

$(a-k_1)x_1=-hy_1$, $(a-k_2)x_2=-hy_2$

辺々掛けて

$\{a^2-(k_1+k_2)a+k_1k_2\}x_1x_2=h^2y_1y_2$

$\therefore$ $\{a^2-(a+b)a+ab-h^2\}x_1x_2=h^2y_1y_2$

$h^2(x_1x_2+y_1y_2)=0 \quad (h\neq0)$

ゆえに　内積$=0$

(2) $P=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ は例1の註2で見たように, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ が単位ベクトルであろうがなかろうが $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ となる.

の2つの理由によって $\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ を対角化しさえすればよいということが分る.

(例4) 2次曲線 $3x^2+2xy+3y^2=8$ を標準形に直せ.

解) $(x \quad y)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=8$ ……… (1)

行列 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有方程式は

$k^2-6k+8=(k-2)(k-4)=0$

ゆえに, 固有値は　$k=2, 4$

よって, $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ と対角化できる.

このとき, (1) は　$(x \quad y)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=8$

$i.e.$　$2x^2+4y^2=8$　$\therefore$ $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

と標準形に直すことができる.

説明) 上の解説中の固有ベクトルの直交ということは, 対角化という作用によっても2次曲線の主軸の直交性は変わらないということを意味し, 単位ベクトルということは対角化という作用によっても伸び縮みしない (長さが変わらない) ということを意味するのだと付け加えておく. ただ, 上のような解を受験の際書いたのでは, “意味が分っていない” として減点されるのではないだろうか. したがって, 固有ベクトルによって P を作り, 実際に $P^{-1}AP$ を計算して対角化を行い, それによって標準形を導いた方がよいように思う.

(資料作成　S62. 10. 22)

[後　記]

例1の註3では,

石谷 茂 著　2次行列のすべて　現代数学社

を参照させて戴きました. 感謝致します.

前述のように, 1時間の授業では全部はとても喋れません. 大要をかいつまんで話しました. 尚, 現実には研究授業は一種の儀式のようなものです. したがって定着度の追跡はやっておりません. ただ, この研究授業に参加された先生方の中10名程より感想文を戴きました. 1人批判された方もありましたが, 大方の批評は分り易くて良かったとのことでした. 中には私の話し方の癖を羅列している人もおりました. 授業実施日は昭和62年11月17日でした.

(福岡大学附属大濠高等学校)

本編には, 付録として “2×2行列の三角化と対角化についての議論” がまとめられておりまして, これがこの資料の裏付けとなっていますが, 今号では頁数の関係により割愛させていただきました.

(次号に掲載の予定です.)