Series ～ 指導の具体例

2次方程式の解と実数 K の大小関係

色による判定

（授業のまとめより）

上村　昭（かみむら　あきら）

はじめに

関数の学習は，数学Ⅰにおいて，１つの柱をなしています．特に２次関数を方程式との関連で学習することは，関数一般について調べる手段を理解させる基礎をなしていますが，生徒にとっては理解が困難な単元の１つであります．

その中で解の分離の問題は，入試によく登場する分野ですが，教科書では，その制約にもよりますが，例題とか問題演習のみで簡単な扱いになっています．ですから授業では，板書を通してまとめをし，説明を加えての指導となります．

内容は中間値の定理の応用に他なりませんが，数学Ⅰの段階ですので直観的に扱います．グラフを多用して視覚に訴えての説明に，生徒は割合よく理解を示してくれます．

ところで，いざ演習の問題を解くとなると，知識として統一を欠くためか，試行錯誤の生徒が多く見られます．原因として，方程式の条件とグラフの条件が整理されておらず混乱してしまうこと，また，むやみに条件を立てて計算を複雑にしてしまうことなどが考えられます．

そこで，解法を分析し，類型化を図って，簡単な判定基準というものを作り指導を試みてみました．標題の"色による判定"とは，この判定基準のことを意味しています．

分類表

２次方程式の解を条件によって分類します．

２次関数　$f(x)=ax^2+bx+c$　$(a>0)$

のグラフの関連で，２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解を α, β とし表を作ってみます．

(p. 11 の表参照)

判定基準

グラフの x 軸を，条件の点を境にして色分けをしておきますと，分類表から，２次方程式の２つの解が同じ色で表されるか，異なった色で表されるかの２つに分類されます．(板書のときは色チョークで明示します．)

(1)　２つの解が同じ色で表されるとき
　グラフの条件として
　頂点の y 座標と x 座標，条件の点を考える．

(2)　２つの解が異なった色で表されるとき
　グラフの条件として
　条件の点を考える．

解法の手順は，この２つのいずれかに分類されますので，判定基準として，方程式の２つの解が同じ色か，異なった色かで判定し，計算式を定めます．

なお，実際の計算にあたっては，頂点の y 座標は

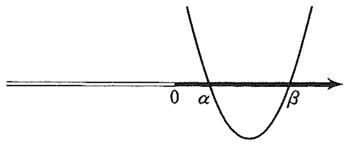
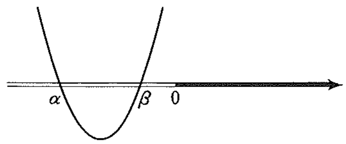
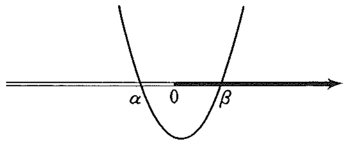
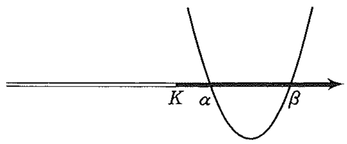
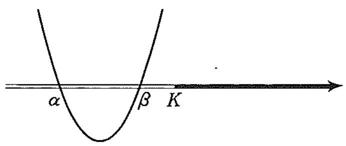
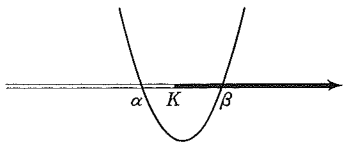
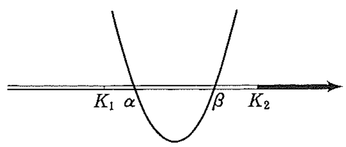
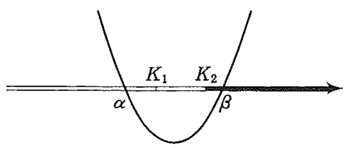
$$-\frac{D}{4a}\leqq 0 \iff D\geqq 0$$

すなわち，実数解の条件を用います．

また，頂点の x 座標は軸の方程式といい替えても同じです．

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{b}{2a}$$

しかし分類表は，頂点の y 座標と x 座標を一対として記した方が，まとめとしてよいと考えています．

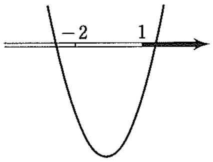
方程式の条件	グラフの条件	グラフ
2つの解が正 $D \geqq 0$ $\alpha+\beta>0$ $\alpha \cdot \beta>0$	頂点の y 座標 $-\dfrac{D}{4a} \leqq 0$ 頂点の x 座標 $-\dfrac{b}{2a}>0$ $f(0)>0$	
2つの解が負 $D \geqq 0$ $\alpha+\beta<0$ $\alpha \cdot \beta>0$	頂点の y 座標 $\leqq 0$ 頂点の x 座標 <0 $f(0)>0$	
1つの解が正，他の解が負 $\alpha \cdot \beta<0$	$f(0)<0$	
2つの解が共に K より大 $D \geqq 0$ $(\alpha-K)+(\beta-K)>0$ $(\alpha-K)(\beta-K)>0$	頂点の y 座標 $\leqq 0$ 頂点の x 座標 $>K$ $f(K)>0$	
2つの解が共に K より小 $D \geqq 0$ $(\alpha-K)+(\beta-K)<0$ $(\alpha-K)(\beta-K)>0$	頂点の y 座標 $\leqq 0$ 頂点の x 座標 $<K$ $f(K)>0$	
1つの解が K より小， 他の解が K より大 $(\alpha-K)(\beta-K)<0$	$f(K)<0$	
2つの解が K_1 よりは大， K_2 よりは小 $D \geqq 0$ $\begin{cases}(\alpha-K_1)+(\beta-K_1)>0 \\ (\alpha-K_1)(\beta-K_1)>0\end{cases}$ $\begin{cases}(\alpha-K_2)+(\beta-K_2)<0 \\ (\alpha-K_2)(\beta-K_2)>0\end{cases}$	頂点の y 座標 $\leqq 0$ $K_1<$ 頂点の x 座標 $<K_2$ $f(K_1)>0$ $f(K_2)>0$	
1つの解が K_1 よりは小， 他の解が K_2 よりは大 $(\alpha-K_1)(\beta-K_1)<0$ $(\alpha-K_2)(\beta-K_2)<0$	$f(K_1)<0$ $f(K_2)<0$	

問題演習の指導

判定基準をどう用いるかということで，実際の問題にあたってみます．62年度の入試問題から．

> x の2次方程式 $x^2+a(a-3)x+a-4=0$ が1より大きな解と -2 より小さな解をもつとき，実数 a の値の範囲は $\boxed{}$ である．　(芝浦工大)

＜考え方＞



2次方程式の解が右図のように異なった色で表されるので

$f(-2)<0$，$f(1)<0$

＜解＞

$f(x)=x^2+a(a-3)x+a-4$ とおく．

$f(-2)=-a(2a-7)<0$

$a(2a-7)>0$

$\therefore\quad a<0,\ \dfrac{7}{2}<a$ ……………………… (1)

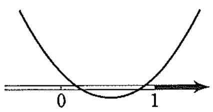
$f(1)=(a-3)(a+1)<0$

$\therefore\quad -1<a<3$ ……………………… (2)

(1), (2) より　$-1<a<0$　(答)

> a，b は実数の定数とする．2次方程式
> $$x^2-ax+b=0$$
> が実数解 α，β をもち，かつ α，β は $0\leqq\alpha\leqq1$，$0\leqq\beta\leqq1$ を満たすものとする．このとき，a，b の満たすべき条件を求めよ．またその条件を満たす a，b を座標とする点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．　(和歌山大)

＜考え方＞



2次方程式の解が右図のように同じ色で表されるので

頂点の y 座標 $\leqq0$

$0\leqq$ 頂点の x 座標 $\leqq1$

$f(0)\geqq0$，$f(1)\geqq0$

＜解＞

$f(x)=x^2-ax+b$ とおく．

$D\geqq0$ より　$a^2-4b\geqq0$ ……………………… (1)

頂点の x 座標：$\dfrac{a}{2}$ より　$0\leqq\dfrac{a}{2}\leqq1$

$\therefore\quad 0\leqq a\leqq2$ ……………………… (2)

$f(0)\geqq0$ より　$b\geqq0$ ……………………… (3)

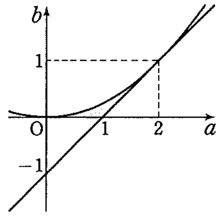
$f(1)\geqq0$ より　$1-a+b\geqq0$ ……………………… (4)

(1), (2), (3), (4) より

$a^2\geqq4b$，$0\leqq a\leqq2$，

$b\geqq0$，$a-b\leqq1$

右図　(答)

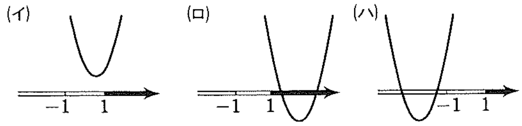


> t の関数 $f(t)$ を $f(t)=1+2at+b(2t^2-1)$ とおく．区間 $-1\leqq t\leqq1$ のすべての t に対して $f(t)\geqq0$ であるような a，b を座標とする点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ．　(東京大)

＜考え方＞

$b\neq0$ のとき，題意より次のグラフが考えられる．

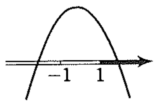
$b>0$ として



(イ) は $D\leqq0$，(ロ), (ハ) は方程式の解が同じ色で表される．

$b<0$ として

方程式の解は異なった色で表される．



＜解＞

$f(t)=1+2at+b(2t^2-1)$

$=2bt^2+2at+1-b$

(i)　$b=0$ のとき

$f(t)=2at+1$

$f(-1)\geqq0$ かつ $f(1)\geqq0$ より

$1-2a\geqq0$ かつ $1+2a\geqq0$ ……………… (1)

(ii)　$b\neq0$ のとき，$b>0$ として

(イ)

$\dfrac{D}{4}=a^2-2b(1-b)\leqq0$

$2a^2+4\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2\leqq1$ ……………… (2)

(ロ)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{D}{4}=a^2-2b(1-b)\geqq0\\[2mm] -\dfrac{a}{2b}\geqq1\\[2mm] f(1)=b+2a+1\geqq0\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\ (3)$$

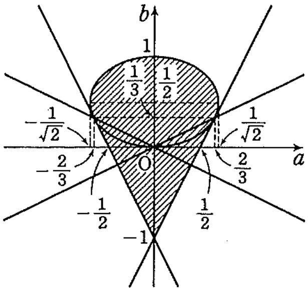
(ハ)

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{D}{4}=a^2-2b(1-b)\geqq 0 \\ -\dfrac{a}{2b}\leqq -1 \\ f(-1)=b-2a+1\geqq 0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$b<0$ として

$$f(-1)\geqq 0 \text{ かつ } f(1)\geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

(1), (2), (3), (4), (5) より求める点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は下図のようになる． (答)



後記

数学Ｉの構成から，方程式の単元で方程式の条件を学習し，関数の単元で，同一の問題をグラフの条件で学習するようになっています．また，それぞれの単元において，配当時間を十分取る余裕もありませんので，どうしてもプリントでまとめをし，演習問題を課すことになります．目的は判定基準の使い方の習熟ですが，２次方程式の解の符号の問題は，方程式の条件を用いる方がポピュラーであることを説明の中で力説しておきます．

(長野県長野西高等学校)