くじは何番目に引いても当たる確率は同じ

岡(おか)　多賀彦(たかひこ)

(はじめに)　教室での生徒の席替えをするとき，くじ引きによることがある．くじは引く順序によらないはずであるが，生徒達にとっては引く順序が問題になるらしく，ジャンケンなどをしてそれを決めている．先に引いた生徒の中に不心得者がいたりすると，終わりのあたりで引く生徒には，教卓の手前など条件の悪い席しか残されていないことがあるからである．

ここでは，くじ引きの原理について考える．

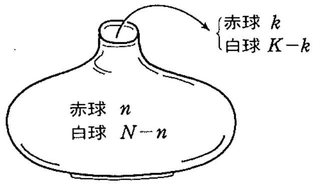
(1)	まとめて取り出しても，1個ずつ順に取り出しても当たる確率は同じである

a)　壺の中に,お互いが区別できる球が N 個入っている．そのうち，n 個が赤球で，残りの $N-n$ 個が白球である．(このレポートに登場する壺では，スタートの時点で，いつもこのようにセットされているとする.)

この壺の中から，無作為に K 個の球を取り出す．このとき，赤球が k 個と白球 $K-k$ 個が取り出される確率は

$$P(k)=\frac{{}_nC_k\times{}_{N-n}C_{K-k}}{{}_NC_K}\qquad ①$$

である．これを **超幾何確率** という．



全事象の数は,異なる N 個の球から重複を許さず K 個を取り出す場合の数 ${}_NC_K$ である．いま考えている事象の数は，赤球 n 個の中から k 個，白球 $N-n$ 個の中から $K-k$ 個を選び出す場合の数 ${}_nC_k\cdot{}_{N-n}C_{K-k}$ である．

したがって,「同様に確からしい」確率は両者の式①で与えられる．

b)　次に，同じ壺の中から，K 人が定められた順序(例えば，出席番号の順)に従って，1個ずつ球を取り出す．誰がどんな色の球を取り出したかを問わないで，ともかく，k 人が赤球を，$K-k$ 人が白球を，取り出した場合の確率を考える．

1つの場合として，初めの k 人がすべて赤球を取り出し，後の $K-k$ 人がすべて白球を取り出す場合がある．この場合の確率 P は，確率の乗法定理により，第1番目の人が赤球を取り出す確率 $\frac{n}{N}$，第2番目の人が赤球を取り出す確率 $\frac{n-1}{N-1}$，………，第 k 番目の人が赤球を取り出す確率 $\frac{n-(k-1)}{N-(k-1)}$，第 $k+1$ 番目の人が白球を取り出す確率 $\frac{N-n}{N-k}$，………，第 K 番目の人が白球を取り出す確率 $\frac{(N-n)-(K-k-1)}{N-(K-1)}$ のすべての積

$$P=\frac{n}{N}\cdot\frac{n-1}{N-1}\cdot\frac{n-2}{N-2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-(k-1)}{N-(k-1)}$$
$$\cdot\frac{N-n}{N-k}\cdot\frac{(N-n)-1}{N-(k+1)}\cdot\cdots\cdot\frac{(N-n)-(K-k-1)}{N-(K-1)}$$
$$=\frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{(N-n)!}{\{(N-n)-(K-k)\}!}\cdot\frac{(N-K)!}{N!}\qquad ②$$

で与えられる．

ところで，具体的に書き出してみると，取り出す人が違っても，赤球が k 個と白球が $K-k$ 個取り出される確率は，いつも P に等しくなっていることが判る．

また，取り出す人が K 人であるとき，赤球を k 人が取り出し，白球を $K-k$ 人が取り出す場合の数は

${}_KC_k$　通りある．

したがって，その球を誰が取り出したかを問題にしないで，ともかく，赤球が k 個，白球が $K-k$ 個取り出される確率は

$${}_KC_k\cdot P$$

$$=\frac{K!}{k!(K-k)!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{(N-n)!}{\{(N-n)-(K-k)\}!}\cdot\frac{(N-K)!}{N!}$$

$$=\frac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\dfrac{(N-n)!}{(K-k)!\{(N-n)-(K-k)\}!}}{\dfrac{N!}{K!(N-K)!}}$$

$$=\frac{{}_nC_k\cdot{}_{N-n}C_{K-k}}{{}_NC_K} \qquad ③$$

となる．

「あたりまえ」と言ってしまえばそれまでであるが，①③は一致している．つまり，**壺の中からまとめて K 個の球を取り出したときの確率と，1個ずつ順に K 個の球を取り出したときの確率とは一致する．**

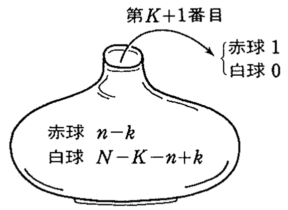
(2)	くじは何番目に引いても当たる確率は同じである

a)　壺の中に，赤球 n 個と白球 $N-n$ 個が入れてある．この壺から1人1個ずつ順番に球を取り出し，元にもどさない．このとき，先に取り出した人が何色の球を取り出したかを問題にしないで，第 $K+1$ 番目の人が赤球を取り出す確率 P_{K+1} を調べる．

先に取り出した K 人のうち，k 人が赤球を，$K-k$ 人が白球を取り出していて，そのあとで，第 $K+1$ 番目の人が赤球を取り出す確率は

$$\frac{{}_nC_k\cdot{}_{N-n}C_{K-k}}{{}_NC_K}\cdot\frac{n-k}{N-K} \qquad ④$$

である．



二項係数の性質

$${}_nC_k\cdot(n-k)=n\cdot{}_{n-1}C_k$$
$${}_NC_K\cdot(N-K)=N\cdot{}_{N-1}C_K$$

から，④は，

$$\frac{n}{N}\cdot\frac{{}_{n-1}C_k\cdot{}_{N-n}C_{K-k}}{{}_{N-1}C_K} \qquad ⑤$$

と変形できる．

ところで，先に取り出した K 人について，赤球を取り出した人が0人から K 人までの確率⑤を足しあわせた確率が P_{K+1} なので

$$P_{K+1}=\sum_{k=0}^{K}\frac{n}{N}\cdot\frac{{}_{n-1}C_k\cdot{}_{N-n}C_{K-k}}{{}_{N-1}C_K}$$

$$=\frac{n}{N}\cdot\frac{\sum_{k=0}^{K}{}_{n-1}C_k\cdot{}_{N-n}C_{K-k}}{{}_{N-1}C_K}$$

$$=\frac{n}{N} \qquad ⑥$$

この P_{K+1} は，第何番目に取り出すかに関係した数 K をあからさまに含まず，壺の初めの状態を表す数 n，N のみで表されている．したがって，**何番目に取り出しても，赤球が取り出される確率は $\boldsymbol{\frac{n}{N}}$ である．**

b)　この問題を漸化式を用いて処理すると，次のようになる．

第1回目に赤球が取り出される確率 P_1 は

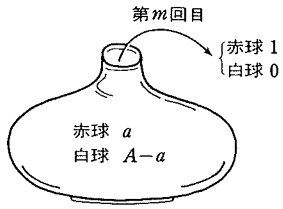
$$P_1=\frac{n}{N} \qquad ⑦$$

である．

第 m 回目に取り出すとき，壺の中に赤球が a 個と白球が $A-a$ 個入っているとする．ただし，$m\geqq 1$，$A=N-(m-1)$　とする．

このとき，第 m 回目に赤球を取り出す確率 P_m は

$$P_m=\frac{a}{A} \qquad ⑧$$



である．

次に，第 $m+1$ 回目に赤球が取り出される確率 P_{m+1} は，第 m 回目に赤球が取り出されたあと，第 $m+1$ 回目にも赤球が取り出される確率

$$P_m\cdot\frac{a-1}{A-1}$$

と，第 m 回目に白球が取り出されたあと，第 $m+1$ 回目に赤球が取り出される確率

$$(1-P_m)\cdot\frac{a}{A-1}$$

との和

$$P_{m+1}=P_m\cdot\frac{a-1}{A-1}+(1-P_m)\cdot\frac{a}{A-1} \qquad ⑨$$

で与えられる．ここで，上の2つの事象が互いに排反であることに注意する．

⑧⑨から

$$P_{m+1}=P_m \qquad ⑩$$

となる．

したがって，⑦⑩から，すべての自然数 m について

$$P_m=\frac{n}{N} \qquad ⑪$$

となる．

ちなみに

$$a=n-(m-1)\cdot\frac{n}{N} \qquad ⑫$$

となるが，この a は，第 m 回目に取り出すとき，**壺の中に残っている赤球の個数の期待値**になっている．

第 $m-1$ 回目までに赤球が k 個取り出されている場合の確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_{N-n}\mathrm{C}_{(m-1)-k}}{{}_N\mathrm{C}_{m-1}}$$

で，壺の中に残されている赤球の個数は $n-k$ 個である．

これから，第 m 回目に球を取り出すとき，壺の中に残されている赤球の個数の期待値は

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1}(n-k)\cdot\frac{{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_{N-n}\mathrm{C}_{(m-1)-k}}{{}_N\mathrm{C}_{m-1}} &= n\cdot\frac{\sum_{k=0}^{m-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k\cdot{}_{N-n}\mathrm{C}_{(m-1)-k}}{{}_N\mathrm{C}_{m-1}}\\ &= n\cdot\frac{{}_{N-1}\mathrm{C}_{m-1}}{{}_N\mathrm{C}_{m-1}}\\ &= n-(m-1)\cdot\frac{n}{N}\end{aligned}$$

となる．

(3) 「ポリヤの壺」などの場合でも，何回目に取り出しても確率は変わらない

「ポリヤの壺」では，壺の中に赤球 n 個と白球 $N-n$ 個を入れておき，1個ずつ取り出すところまでは同じであるが，球を取り出したとき，その球の色を確認したあとその球を元の壺にもどし，さらに同じ色の球を C 個追加する．ただし，C は試行の途中で壺の中の球がなくならない範囲の整数とする．

ところで，(2) b）の方法を用いると，もっと変わった壺であっても，何回目に取り出しても赤球が取り出される確率が変わらないことを示すことができる．

「壺の中に赤球 n 個と白球 $N-n$ 個が入れられてある．その壺から球を1個ずつ取り出し，その色を確認したあとその球を元の壺にもどす．さらに，あらかじめ決めておき，第1回目には $f(1)$ 個，第2回目には $f(2)$ 個，第3回目には $f(3)$ 個などと，同じ色の球を追加する．」

第1回目に赤球が取り出される確率は

$$P_1=\frac{n}{N}$$

で変わらない．

第 m 回目に球を取り出すとき，壺の中に赤球 a 個，白球 $A-a$ 個が入っていたとする．ただし

$$A=N+f(1)+f(2)+\cdots+f(m-1) \qquad ⑬$$

第 m 回目に赤球が取り出される確率は

$$P_m=\frac{a}{A}$$

で，形の上では変わらない．

第 $m+1$ 回目に赤球が取り出される確率は

$$P_{m+1}=P_m\cdot\frac{a+f(m)}{A+f(m)}+(1-P_m)\cdot\frac{a}{A+f(m)} \qquad ⑭$$

で与えられる．

これより　　$P_{m+1}=P_m$

したがって，このようなかなり変わった壺であっても，無作為である限り，赤球が取り出される確率は，何回目であっても $\frac{n}{N}$ になっている．

ちなみに，「ポリヤの壺」は

$$f(1)=f(2)=\cdots=C$$

のときである．

(4) 取り出す順序を変えても，確率は変わらない

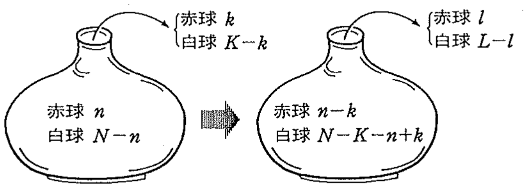
赤球が n 個と白球が $N-n$ 個入った壺がある．この壺から，先に K 個の球を取り出し，色を確認しないで別の箱に入れる．次に L 個の球を取り出したところ，赤球が l 個と白球が $L-l$ 個であった．

このとき，先に取り出して別の箱に入れた K 個の

球について，赤球が k 個，白球が $K-k$ 個である確率を調べる．

いま，先に K 個の球を取り出したとき，赤球が k 個である事象を A_k，そうでない事象を $\overline{\mathrm{A}_k}$，後で L 個の球を取り出したとき，赤球が l 個である事象を B とする．

$$P(\mathrm{A}_k\cap \mathrm{B})=\frac{{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_{N-n}\mathrm{C}_{K-k}}{{}_N\mathrm{C}_K}\cdot\frac{{}_{n-k}\mathrm{C}_l\cdot{}_{(N-K)-(n-k)}\mathrm{C}_{L-l}}{{}_{N-K}\mathrm{C}_L} \quad ⑮$$

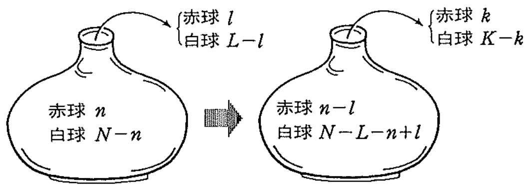


⑮ の右辺の階乗の組み合わせを変えると

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_l\cdot{}_{N-n}\mathrm{C}_{L-l}}{{}_N\mathrm{C}_L}\cdot\frac{{}_{n-l}\mathrm{C}_k\cdot{}_{(N-L)-(n-l)}\mathrm{C}_{K-k}}{{}_{N-L}\mathrm{C}_K} \quad ⑯$$

となる．

しかし，⑯ は別の意味を持ってしまっている．壺の中から，先に L 個を取り出したところ，赤球が l 個，白球が $L-l$ 個であって，次に K 個を取り出したところ，赤球が k 個，白球が $K-k$ 個である確率になってしまっている．



つまり，⑮ ⑯ は，**球を取り出す順序を変えても確率は変わらない**ことを意味している．

$$P(\mathrm{A}_k\cap\mathrm{B})+P(\overline{\mathrm{A}_k}\cap\mathrm{B})=\sum_{k=0}^{K}P(\mathrm{A}_k\cap\mathrm{B})$$

$$=\frac{{}_n\mathrm{C}_l\cdot{}_{N-n}\mathrm{C}_{L-l}}{{}_N\mathrm{C}_L}\cdot\sum_{k=0}^{K}\frac{{}_{n-l}\mathrm{C}_k\cdot{}_{(N-L)-(n-l)}\mathrm{C}_{K-k}}{{}_{N-L}\mathrm{C}_K}$$

$$=\frac{{}_n\mathrm{C}_l\cdot{}_{N-n}\mathrm{C}_{L-l}}{{}_N\mathrm{C}_L} \quad ⑰$$

したがって，⑯ ⑰ から

$$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\frac{P(\mathrm{A}_k\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A}_k\cap\mathrm{B})+P(\overline{\mathrm{A}_k}\cap\mathrm{B})}$$

$$=\frac{{}_{n-l}\mathrm{C}_k\cdot{}_{(N-L)-(n-l)}\mathrm{C}_{K-k}}{{}_{N-L}\mathrm{C}_K} \quad ⑱$$

となる．

$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ は，先に K 個を取り出したあと，L 個を取り出したときの確率であるが，⑱ は，先に L 個を取り出したとき赤球 l 個，白球 $L-l$ 個であって，次に K 個を取り出したとき赤球 k 個，白球 $K-k$ 個である確率に化けてしまっている．確率では演算の順序を逆転できる．

(まとめ) 壺の中から球を取り出すときの確率（超幾何確率）を例にして，くじ引きの原理を調べた．意外にも，生徒達の心配に反して，無作為である限り，確率はおおらかにできている．

（大阪府立大手前高等学校）