行列の指導について

猪熊（いのくま）　正雄（まさお）

はじめに

高校在職 32 年間に，4 回の教育課程の改訂があった．すなわち，昭和 28 年 4 月～，昭和 38 年 4 月～，昭和 48 年 4 月～，そして，昭和 57 年 4 月～の現行教育課程である．

このうち，行列は 1 次変換と結び付いて，昭和 48 年 4 月からの教育課程より導入された．在学中には，行列式についての多少の知識を持っていただけであったのと，在職高校の数学科での指導科目や項目の担当割当てが，私の場合には，数列や微積分に偏っていたために，行列の指導についての経験は少なかった．（当時，在職校では，1 科目を 2 人で分担指導する形式をとっていた．）

そのため，何回かの学習指導のチャンスにおいても，生徒にどのように教えるかの前に，大学入試問題の内容もふまえた上での行列全体の指導内容のプロフィルをつかむのに苦労した．実際の指導も，試行錯誤の連続であって，今から考えると，お粗末であった．

現行教育課程とのお付き合いは，わずか 3 年であった．特に，この期間は，校内における役職の関係で，益々数学の指導から遠くなっていた．停年退職後，上京して予備校の教壇に立つ機会が与えられ，長年のお付き合いをしている数研出版のお仕事をさせて頂く過程で，漸く自分なりの行列指導のあり方をつかむことができたといえる．

これから述べることは，以上のような経緯の下での所産である．経験豊かな諸先生方に参考になるような内容はないが，これから行列の指導をされる方々に，なにがしかの参考になれば幸せである．

導入にあたって

最近の生徒は，一部を除き，予習，復習をしなくなったようである．理科についても同じであるが，数学という教科は，各項目ともに最初はわかりきったことが述べられている．そして，いつの間にかわからなくなるという特性を持っている．

そこで，生徒の学習意欲を幾分でも喚起するために，各章，各節の始めには，次のようなフローチャートを板書することをやり出した．幸い，意欲のある生徒には，いくばくかの反応があったようである．

例えば，行列については，下図の通り．

始　め　（数研版教科書 改訂版 代数・幾何による．）

↓

1　行列の紹介　。行列とはどんなものか．

↓

2　行列の和, 差, 実数倍の求め方　。ベクトルとよく似ている．

↓

3　行列の掛け算　。ここは難しい．しっかり勉強してマスターしよう．

↓

4　行列の乗法の特別な性質　。ここが頂点だ．交換可能とはなにか．

↓

4　行列の有名な等式　。ケーリー・ハミルトンの定理…大切だよ．

↓

5　逆行列の求め方　。行列の逆数というものかな．…ないときもある．……これが問題だ．

↓

6　逆行列を利用して，連立 1 次方程式を解く　。これで，数学 I の 2 元連立 1 次方程式の解法は免許皆伝だ．

↓

終わり　。Let's go !（さあ，始めよう）

生徒の行列に対する知識は皆無であるが，いま習っていることが，どのあたりなんだという 1 つの羅針盤（チャート）にはなり得る．

行列の紹介

私は，元来，内容の説明や板書に力を入れ過ぎる方で，そのために，生徒にノートを使って問題練習をさせる時間が往々にして不足するという悪いくせがあった．

しかし，行列の導入にあたっては，ずい分走ったようである．これは，配当時間が絞られていたせいでもある．ここでの内容は，次の2つにまとめられる．

[1] 行列の定義と，諸用語の説明

[2] 行列の相等

◦行列，成分

ここでは，教科書に書かれている以上のことはいわなかった．

◦行，列，(i, j) 成分

横書きの原稿用紙を使い慣れているときには，行という概念ははっきりしているが，生徒の作文用紙は縦書きであるため，行と列の区別は，なかなか難しいというのが実感である．

◦m 行 n 列の行列，$m \times n$ 行列 （同じ型）

これらの用語は，行列の演算に直接関係してくるので注意を向けさせる．同じ型の行列という用語の説明を，ここで紹介しておくのもよいと思った．

◦正方行列，n 次の正方行列

行列の積の主役であることを，説明しておくのもよい．

◦行ベクトル，列ベクトル

これが，一番の問題点である．簡単にいえば，トム・アンド・ジェリー（猫だって生き物さ，ねずみだって生き物さ，仲よく……）よろしく，1行 n 列の行列も，m 行1列の行列もあって差し支えがないわけである．ところで，ここには，2つのポイントがある．

第1は，平面上のベクトルとの関係である．大半の教科書は，平面上のベクトルに続いて，行列に入っているので記憶ははっきりしていることは留意しておきたい．

例えば，ベクトル $\vec{a}=(a_1, a_2)$ は1つの平面上のベクトルであるが，いったん行列の世界に入ると，$(a_1 \ \ a_2)$ と書かれて，2次元の行ベクトルと呼ばれたり，$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と書かれて，2次元の列ベクトルと呼ばれる．しかし，再びベクトルの世界に戻ると，$\vec{a}=(a_1, a_2)$ となる．両者に共通していることは，a_1 と a_2 の間にあったコンマ（ ， ）が行列の世界では取り去られているというところである．このことは，行列の積の導入時に利用される．

第2の点は，一般の $m \times n$ 行列を分解して，n 個の m 次元ベクトルや，m 個の n 次元ベクトルを作り出すことができることである．更に，いくつかの行ベクトルを組み合わせたり，いくつかの列ベクトルを組み合わせたりすることによって，新しい $m \times n$ 行列を作ることができるということも可能である．

このことも，行列の積や，行列の応用分野である1次変換の計算において重要である．

具体的な資料の利用について

先に述べたことにも関係するが，新しい内容の導入には，いろいろ考える方であり，関連すると思われる具体的な資料も，できるだけ利用して，生徒の興味と関心を引くことには熱心であったが（多分にその場の思い付きを含む），行列に関しては，できるだけドライに話を進めた．

というのも，具体的な資料の利用も，行列の積まででであることと，最初に偏った先入観を与えるのは好ましくないという考え方があったからである．このことは，たまたま手に入れた行列指導の啓蒙書の影響もあった．

行列の相等

行列とは，いくつかの数字や文字を長方形状に並べたものであるから，いろいろな型がある．2つの行列を比較して，等しいという場合には，それぞれを構成する成分の対応するものがすべて一致することである．そのためには，当然のことながら同じ型であることが必要となる．

等しいという考え方

数学の対象となる1つの集合において，含まれる2つの要素が等しい条件を考えることは，非常に重要である．これまでに，数学Ⅰでは，複素数の相等，集合の相等，式の相等（恒等式の概念）があり，代数・幾何では，ベクトルの相等を考えた．

ところで，相等という概念は，学習が進むにつれて非常に重要となるが，導入のときには，どうしても押し付けのようにとられるものである．

ところが，等しいという概念の芽生えは，私の3

歳の孫の発言から類推すると，相当早くから存在するようである.「これは，おじいちゃんの分と同じだ．あっ，あれもこれと同じだ ……」．同じという概念は，等しいという概念とはもちろん異なるが，ある点について同じであるという発想が昇華して，等しいという概念が生まれると考えることもできる．こう考えると，相等条件をまず最初に取り上げるのは，何も押し付けと考えなくてよいようである．この年になって，幼児である孫に教えられるとは……，というわけである．

行列の和・差の求め方

行列の和を求める対象となる行列は，同じ型であることが前提となる．計算方法は，平面上のベクトルにおける $(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$ から，直観的に理解できる．また，加法の交換法則や結合法則についても同様である．

更に，零行列の存在や，成り立つ等式，差の定義についても同じである．

ここでの問題点は，次の2つである．

◦同じ型の意味

行列の乗法の性質に関連して，次のものがある．

$A^2=kA$ から $A(A-k)=O$ …… ① は誤り

$A(A-kE)=O$ …… ② とすべき．

Aを2次の正方行列とする．kは(k)すなわち1×1行列であるから，Aと型が異なるので，$A-k$という演算は存在しない．そこで $kA=kEA$ と考えて，②の変形が生まれる．同じ型という条件は，このように意外な所で顔を出すことになる．(このようなことは，他にもいろいろ出てくる．その度毎に，その場所と関連する個所に，それぞれ相手のページ・ナンバーなどを記入させておくということも，よくやったものである.)

◦零行列と零ベクトル

これも，行列の積のところに関係してくる．いま，Aを2次の正方行列とする．積 AX が零行列のとき，Xが2次の正方行列ならば $AX=O$ となるが，Xが2次元の列ベクトルならば $AX=\vec{0}$ と書く．また，後者の場合は $A\vec{x}=\vec{0}$ と書く場合がある．

行列の実数倍

計算方法は，平面上のベクトルの実数倍の応用として素直に受け入れられる．

$$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$$

また，これから，実数倍についての分配法則，結合法則が成り立つことについても同じである．

ところで $k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$ は，1次変換の相似変換を表す $k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ や，

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$$

(回転変換と相似変換の合成) という応用面がある．

なお $(-3)A=-3A$ については，左辺は行列Aに -3 を掛けたものであり，右辺はその結果として得られる行列 $-3A$ を表している．この相違点にも注意させる．

行列の積の導入

行列の和・差の計算から類推できる，最も素直な発想によれば $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap & bq \\ cr & ds \end{pmatrix}$ が考えられる．しかし，最初にこれを持ち出して，その不完全性を追求することは困難である．

そこで，ベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ の内積を $(a_1\ \ a_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2$

をルールとして納得させることにする．

ここで，あらかじめ，2つの行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$$

を念頭において，次のように組み立てていく．

$$\text{(i)}\quad \left.\begin{array}{l} (a\ \ b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=ax+by \\ (c\ \ d)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=cx+dy \end{array}\right\} \cdots\cdots ①$$

これから $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ …… ②

(ii) 同じようにして

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} au+bv \\ cu+dv \end{pmatrix} \cdots\cdots ③$$

②，③を組み合わせると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by & au+bv \\ cx+dy & cu+dv \end{pmatrix} \cdots\cdots ④$$

これは，行列の世界における積のとりきめと考えさせるしかない．

(i)の結果から

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

これらは，それぞれ，１次変換の x 軸，y 軸に関する基本ベクトルの像を求めていることになる．まとめた $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は単位行列の１つの性質を表す．

(iii) $(a \quad b)\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$ は $(a \quad b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$(a \quad b)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ をまとめたものと考えることによって

$$(a \quad b)\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}=(ax+by \quad au+bv)$$

(iv) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(x \quad y)$ については，これまでの手法では説明がつかない．そこで

(i) (1×2 行列)×(2×1 行列)＝1×1 行列

更に (2×2 行列)×(2×1 行列)＝2×1 行列

(ii) についても同じ．

(i)，(ii) をまとめて

(2×2 行列)×(2×2 行列)＝2×2 行列

(iii) から (1×2 行列)×(2×2 行列)＝1×2 行列

これらより，一般に

(l×m行列)×(m×n行列)＝l×n行列

が成り立つことを認めさせ，

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\times(x \quad y)$ …… (2×1行列)×(1×2行列)＝2×2行列

よって $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(x \quad y)=\begin{pmatrix} ax & ay \\ bx & by \end{pmatrix}$ とする．

(iv) の形は，行列の計算問題以外には，今後顔を出すことはない．

以上をまとめると，2×2 行列の積は，

$(a \quad b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=ax+by$ の組み合わせにつきるといえる．

④ 自体の計算は，次のように表現できる．

$$\begin{array}{cc|cc} & & x & u \\ & & y & v \\ \hline a & b & ax+by & au+bv \\ c & d & cx+dy & cu+dv \end{array}$$

これは昔から用いられる手法であるが，行列 ⟶ １次変換と続く過程から考えると，④ を公式として覚えるよりは，①，②，③ ⟶ ④ という見方をマスターさせる方がよいと思われる．

もっとも，高校在職中は，そこまでの見通しができなかったために，④ の指導に重心をおき過ぎたようである．

このように考えさせておくと，１次変換における「２点 A(1, 2)，B(−1, 1) を，それぞれ A′(2, 0)，B′(1, −3) に移す１次変換を表す行列を求めよ．」という問題で，求める行列を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

をまとめ

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ として，両辺に逆行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ を右から掛けて求めるという発想も，ごく自然に受け止められる．

行列の乗法の性質

乗法の結合法則，分配法則については，問題はない．しかし，一般の演算法則の最初にあった交換法則が示されていないことに，注意を向けさせておくのもよい．

続いて，単位行列，零行列を，数の乗法における 1，0 と同じ性質をもつものとして導入する．零行列は，加法・減法において既出であるが，単位行列はここが初めてである．単位行列については，今後の展開において，非常に重要な役割をもつということを，強調しておくとよい．

零因子の存在は，行列の積の定義から生まれた，行列の乗法の特別な性質として位置付けられよう．

行列Aの累乗については，$A^n=A^{n-1}A$，$A^n=AA^{n-1}$ $(n\geqq 2)$ は，いずれも正しいが，この２つの表現のうち，どちらが正式の表現であるかという質問を，非常に優秀な生徒から受けたことがある．このことから，$A^{n-1}A=AA^{n-1}$ を紹介しておくことも必要かなと考えている．

中途半端なところで終わったことを，御詫び致します．

御一読を深謝致します．

（代々木ゼミナール）