2×2 行列の n 乗の求め方
―授業のまとめの中より―

青柳（あおやぎ）　龍彦（たつひこ）

私の学校の２年生は，教科傍用として問題集「要点と演習」と「チャート式 解法と演習」を数学Ⅰ，基礎解析，代数・幾何にわたって用いています．普段の補習授業では主に「要点と演習」の重要例題を解いています．

今年の夏休みの前期の補習授業では主に"行列"のまとめをしましたが，その中より 2×2 行列 A が与えられたとき，A^n を求める問題の解説を披露したいと思います．御批判を願います．問題は前記の「要点と演習」，「チャート式」の他，他の受験問題集より採りました．

〔具体的展開〕

この時間は　2×2 行列 A が与えられたとき，A^n を求める問題を考えてみよう．

次の問題を見ると，全部 2×2 行列ですが，その n 乗の求め方は色々あります．先生が一応解いてみます．先生はこの解き方を思い付きましたが，他にもっと良い解法があるかもしれません．諸君の今まで習った知識を駆使して創意工夫のある解を見付けて下さい．

〔問題〕　次の行列 A について，A^n を求めよ．

(1) $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$　(2) $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}$　(4) $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

(5) $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$

(6) $A=\begin{pmatrix}3&1\\-4&-2\end{pmatrix}$

〔解説〕

(1) まず，A^2 を求めてみる．

（解）　$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$

$n\geqq3$　では

$$A^n=A^{n-2}A^2=A^{n-2}O=O$$

（答）　$\begin{cases}n=1 \text{ のとき } A^n=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\\ n\geqq2 \text{ のとき } A^n=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{cases}$

(2) 同じく，まず A^2 を求めてみる．

（解）　$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2&2^2\\2^2&2^2\end{pmatrix}$$

以上より類推して　$A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}$

これを数学的帰納法によって証明する．

$n=1$ のときは明らか．

$n=k$ のとき成り立つと仮定すれば

$$A^k=\begin{pmatrix}2^{k-1}&2^{k-1}\\2^{k-1}&2^{k-1}\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^{k+1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{k-1}&2^{k-1}\\2^{k-1}&2^{k-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k&2^k\\2^k&2^k\end{pmatrix}$$

これは $n=k+1$ のときも成り立つことを示す．

よって，すべての自然数 n について

$$A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}\qquad\text{（答）}$$

(3) 今度は一寸変わった解き方を示そう．対角要素が a，a であることに着目する．

（解）　$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$J=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ とおくと

$$J^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$$

そして　$A=aE+J$

$$\therefore\ A^2=a^2E+2aJ$$

$$A^3=(aE+J)(a^2E+2aJ)$$

$$=a^3E+3a^2J$$

これより類推して

$$A^n=a^nE+na^{n-1}J$$

数学的帰納法でこれを示す．$n=1$ のときは明らかである．$n=k$ のとき成り立つと仮定すれば

$$A^k=a^kE+ka^{k-1}J$$

$$\therefore\ A^{k+1}=(aE+J)(a^kE+ka^{k-1}J)$$

$$=a^{k+1}E+(k+1)a^kJ$$

これは　$n=k+1$ のときも成り立つことを示すから，すべての自然数 n について

$$A^n=a^nE+na^{n-1}J$$

$$=a^n\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+na^{n-1}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}\\0&a^n\end{pmatrix}\qquad\text{(答)}$$

これは，すべての 2×2 行列 B について

$$BE=EB=B$$

という性質を単位行列 E はもっていることによる．即ち，単位行列を掛ける場合は交換法則が成り立つので，$A^n=(aE+J)^n$ が展開できるのであるが，二項定理を未だ学んでいないので，これ以上の説明は省略する．

(4)　この問題は見当がつき難い．しかし，$n=2$，3，4，5，…… の場合を計算してみると，循環するものであることがわかる．

(解)　$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$$

これは，単位行列であるから，以下これの繰返しと考えられる．即ち，予想は　$k=1$，2，3，…… として

i)　$n=4k-3$　のとき　$A^n=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

ii)　$n=4k-2$　のとき　$A^n=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

iii)　$n=4k-1$　のとき　$A^n=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

iv)　$n=4k$　　のとき　$A^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

これは，次のようにして証明できる．$k=1$ のときは示しているから，$k\geqq2$ とする．$A^4=E$ であるから

i) の場合

$$A^n=A^{4k-3}=A^4A^{4(k-1)-3}=A^{4(k-1)-3}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

ii) の場合

$$A^n=A^{4k-2}=A^4A^{4(k-1)-2}=A^{4(k-1)-2}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

iii) の場合

$$A^n=A^{4k-1}=A^4A^{4(k-1)-1}=A^{4(k-1)-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

iv) の場合

$$A^n=A^{4k}=A^4A^{4(k-1)}=A^{4(k-1)}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

(答)

説明を加えると，これは結局，数学的帰納法による証明を使っているのである．

以上を見ると，A^n の求め方にも色々あることがわかって来ましたが，次の (5), (6) では更に種々の理論を用いる方法を考えてみよう．しかし，この理論はすべて習ったものばかりです．これらの理論の応用を考えてみるのです．

(5)　これは今までの問題と一寸違っています．即ち 3 個の行列の積になっています．慌てて掛け算をやってはいけません．3 個の行列の積になっているのは意味があるのではないでしょうか．

よく見ると，真中の行列は対角行列ですね．そうすると，何か閃きませんか．そうです．標準形になっていないかと，確かめてみましょう．最後の行列は最初の行列の逆行列になっている！　ここまで気がつけば解はもうわかりましたね．

(解)　$P=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ とおくと　$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}$ とおくと　$B^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&(-1)^n\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}A^n&=PBP^{-1}PBP^{-1}\cdots\cdots PBP^{-1}\\&=PB^nP^{-1}\\&=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0\\0&(-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&(-1)^n\\2^n&(-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\-2^n+(-1)^n&2^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$ (答)

ここで，$A=PBP^{-1}$ ならば　$A^n=PB^nP^{-1}$ でしたね．

(6)　この問題では，A^2，A^3，A^4，…… を計算して A^n を類推しようと思ってもなかなかうまく行きません．まず，行列の対角化を考えてみましょう．上の (5) の形に変形して　$A=PBP^{-1}$　ならば $A^n=PB^nP^{-1}$ を使う方法です．

(解)　$A=\begin{pmatrix}3&1\\-4&-2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3&1\\-4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$　　とおくと

$\begin{pmatrix}3&1\\-4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3-k&1\\-4&-2-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ……　㊍

固有値を求める．固有方程式

$\Delta=(3-k)(-2-k)+4=0$

$\therefore\ k^2-k-2=0$

$\therefore\ (k+1)(k-2)=0$

を解いて，固有値は　　$k=-1,\ 2$

次に，固有ベクトルを求める．

(i)　$k=-1$ のとき，㊍ より

$\begin{pmatrix}4&1\\-4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

ゆえに　　$4x+y=0$

固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\-4s\end{pmatrix}$ (s は実数，$s\neq0$)

(ii)　$k=2$ のとき，㊍ より　$x+y=0$

固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\-t\end{pmatrix}$　(t は実数，$t\neq0$)

$s=t=1$ とおいて，$P=\begin{pmatrix}1&1\\-4&-1\end{pmatrix}$ とする．

$$\begin{aligned}B&=PAP^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&1\\-4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\-4&-2\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-1\\4&1\end{pmatrix}\right\}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-1\\-8&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\4&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&0\\0&6\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

これで行列 A の対角化ができた．

$$\begin{aligned}B^n&=PAP^{-1}PAP^{-1}\cdots\cdots PAP^{-1}\\&=PA^nP^{-1}\end{aligned}$$

ゆえに　　$A^n=P^{-1}B^nP$

ところで，B^n は

$B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$

$B^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)^2&0\\0&2^2\end{pmatrix}$

$B^3=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^2&0\\0&2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)^3&0\\0&2^3\end{pmatrix}$

より類推して

$B^n=\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&2^n\end{pmatrix}$

ゆえに

$$\begin{aligned}A^n&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-1\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-4&-1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-(-1)^n&-2^n\\4(-1)^n&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-4&-1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\cdot2^n-(-1)^n&2^n-(-1)^n\\4(-1)^n-4\cdot2^n&4(-1)^n-2^n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\dfrac{4\cdot2^n-(-1)^n}{3}&\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}\\\dfrac{4(-1)^n-4\cdot2^n}{3}&\dfrac{4(-1)^n-2^n}{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$ (答)

これで一応解けたが，諸君が学んだ固有値の応用であることがわかるね．この方法で 2×2 行列を対角行列に直す，即ち，対角化ができることがわかったね．

次に，この問題を行列多項式を利用して解くことを考えてみよう．

行列多項式というのは，多項式

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$

の変数 x の代わりに 2×2 行列 A をおいたもの

$a_0A^n+a_1A^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}A+a_nE$

のことです．ここに，Eは単位行列です．行列多項式に関して有名な定理は諸君が既に知っている“ハミルトン・ケイリー の定理”です．即ち，

「$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ならば　$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$」

という定理でしたね．

さて，いよいよこれを使う解を考えてみましょう．

(別解)　$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$のとき，ハミルトン・ケイリーの定理により　$A^2-A-2E=O$

一般に，A^n を A^2-A-2E で割った商を $Q(A)$，余りを $aA+bE$ とすると

$$A^n=(A^2-A-2E)Q(A)+aA+bE$$
$$=(A+E)(A-2E)Q(A)+aA+bE$$

$A=-E$ とおくと　$(-1)^nE=(-a+b)E$

$A=2E$　とおくと　$2^nE=(2a+b)E$

ゆえに　$\begin{cases} -a+b=(-1)^n \\ 2a+b=2^n \end{cases}$

これを解いて

$$a=\frac{2^n-(-1)^n}{3},\quad b=\frac{2^n+2(-1)^n}{3}$$

ゆえに　$A^n=(A^2-A-2E)Q(A)$

$$+\frac{2^n-(-1)^n}{3}A+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}E$$

ところで，$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ の場合は

$A^2-A-2E=O$ であったから

$$A^n=\frac{2^n-(-1)^n}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{4\cdot 2^n-(-1)^n}{3} & \dfrac{2^n-(-1)^n}{3} \\ \dfrac{-4\cdot 2^n+4(-1)^n}{3} & \dfrac{-2^n+4(-1)^n}{3} \end{pmatrix}$$

(答)

これで，行列多項式は多項式と同様に取り扱えることがわかりましたね．

ところで，色々解いて来ましたが，形が似たような問題でも解き方は色々ですね．そして，それらはみな諸君が習った基礎事項の応用なのです．諸君も色々自分の解を考えてみて下さい．今日はこれで終ります．何か質問はありませんか．

(ここで，質問が色々出た．覚えているものを挙げてみよう．そして，それに対する答も．)

〔質問1〕(6)で類推によって B^n を求めたが，数学的帰納法によって証明する必要はないのか．

(答)　B^n を最終的に求める問題では数学的帰納法でキチンと証明しておいた方がよいと思うが，B^n を途中で使う場合は要らないだろう．解答も長くなるので．

ついでに，この解では B^n を類推したが，これも不必要だったかもしれない．それは，諸君は

$$B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Longrightarrow B^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

を知っているから．

〔質問2〕$(PBP^{-1})^n=PB^nP^{-1}$ ではないのか．(5)ではそうなっているが，(6)の解ではそうなっていないように思う．

(答)　$(PBP^{-1})^n=PB^nP^{-1}$ は正しい．しかし(6)についての君の意見は勘違いだ．解答をよく見てごらん．最初に B^n を求めるときは $B^n=PA^nP^{-1}$ で君のいうのが合っている．次に A^n を求めるときは，これに左から P^{-1} を，右からPを掛けているだけだ．(この質問者は(6)の解がよくわかっていないらしい，注意する．)

〔質問3〕(6)の解で $s=t=1$ とおいたが，勝手にそうおいてよいのか．

(答)　固有ベクトルは確かに $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s \\ -4s \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$ だが，ここに必要なのは，対角化に必要な行列Pである．$P=\begin{pmatrix} s & t \\ -4s & -t \end{pmatrix}$ として計算してもよいが，$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ の方が計算も簡単で，そして，それで十分なのである．即ち，Pのうちの最も簡単なものをもって来ればよい．だから $s=t=1$ とおいた．

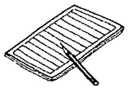
〔質問4〕(6)の答は下から2行目で留めてよくないか．

(答)　それでよいと思う．(これは前の解についてである．)

〔質問5〕何か A^n を求める一般的方法はないのか．

(答)　一般的方法はないといっておこう．それは

(6) のような解を考えれば，大抵の 2×2 行列は A^n を求めることができるだろう．併し，例外があって，この方法でも求まらないものもあるだろうし，この方法より簡単な解ができるものもあろう．即ち，牛刀を以って鶏を割くことになるかもしれない．したがって，個々の問題に当たってそれ相応の解を工夫するのがよい．そして，これが諸君の頭を鍛えることにも繋がる．創意工夫の心構えで問題に当たって貰いたい．ただ，より一般的な考え方を求めることが科学の発展に貢献する．このことだけは記憶してよいことです．



〔後記〕

私の学校では，2年は，特文，国文，私文，特理，国理，私理の6コースに分かれています．

この授業は特文の夏季の補習一コマ90分の授業の一端です．少し詳し過ぎると思われる方もおられると思いますが，大学受験の事を考えたり，将来文系でも線形代数が必要だろうと愚考したりで，この様な授業をしてみました．

尚，標準形は $P^{-1}AP$ が正しいでしょうが，この場合は PAP^{-1} で解いています．そして，御承知のように，2×2 行列の場合，固有方程式の解の種類により標準形には3つのタイプがありますが，(6) はその1つのタイプの例です．

御一読下さいまして有難とうございました．御批評を賜れば幸に存じます．

（福岡大学附属大濠高等学校）