数学Ⅱ，B，C 第 1 問

(1) ① を変形すると　$(x+1)^2+(y-6)^2=12$

よって，C_1 の中心の座標は $({}^{アイ}-1,\ {}^{ウ}6)$，半径は $r_1=\sqrt{12}={}^{エ}2\sqrt{{}^{オ}3}$ である。

② を変形すると　$(x-1)^2+(y-1)^2=27$

よって，C_2 の中心の座標は $(1,\ 1)$，半径は $r_2=\sqrt{27}={}^{カ}3\sqrt{{}^{キ}3}$ である。

また，C_1 の中心と C_2 の中心の間の距離は　$d=\sqrt{\{(-1)-1\}^2+(6-1)^2}=\sqrt{{}^{クケ}29}$

参考　$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$ であるから，C_1 と C_2 は 2 点で交わることがわかる。

(2) (i) $x=0$，$y=0$ のとき　$2x-5y+25=25 \geqq 0$

よって，原点 O は D に含まれる。 $({}^{コ}$ ⓪$)$

$x=-1$，$y=6$ のとき　$2x-5y+25=-2-30+25=-7<0$

よって，C_1 の中心 $(-1,\ 6)$ は E に含まれる。 $({}^{サ}$ ①$)$

$x=1$，$y=1$ のとき　$2x-5y+25=2-5+25=22 \geqq 0$

よって，C_2 の中心 $(1,\ 1)$ は D に含まれる。 $({}^{シ}$ ⓪$)$

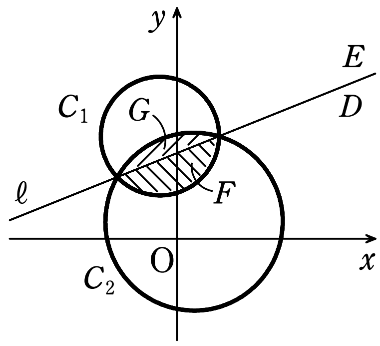
(ii) 点 P$(x,\ y)$ を C_1 上にあり，かつ C_2 上にもある点とすると，実数 x，y は ① と ② の両方を満たす。このとき，実数 x，y は ④ も満たすから，P は ℓ 上にある。

よって，点 P を C_1 上にあり，かつ C_2 上にもある点とすると，P は ℓ 上にある。

$({}^{ス}$ ②$)$

(iii) (1)，(2) の (ii) により，C_1 と C_2 は 2 点で交わり，これらの交点は直線 ℓ 上にある。

また，(2) の (i) と右の図により，領域 D は ℓ およびその下側の部分，領域 E は ℓ の上側の部分を表す。



$x^2+y^2-7y+(2x-5y+25)<0$ を変形すると

$$(x+1)^2+(y-6)^2<12$$

これは C_1 の内部を表す。

よって，F は C_1 の内部と領域 D の共通部分である。

$x^2+y^2-7y-(2x-5y+25)<0$ を変形すると

$$(x-1)^2+(y-1)^2<27$$

これは C_2 の内部を表す。

したがって，G は C_2 の内部と領域 E の共通部分である。

③ の表す領域は，F と G の和集合であるから，上の図の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。

よって，図示したものとして最も適当なものは　^{セ} ⓪

(iv)　$2x-5y+25 \geqq 0$ のとき，⑤ は

$$x^2+y^2-7y-(2x-5y+25)<0$$

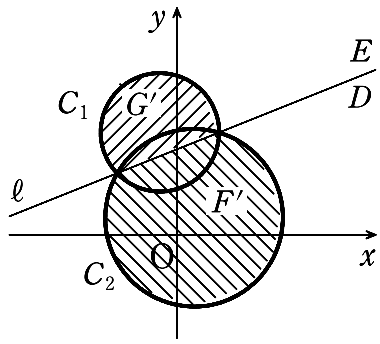
$2x-5y+25<0$ のとき，⑤ は

$$x^2+y^2-7y+(2x-5y+25)<0$$

よって，C_2 の内部と領域 D の共通部分を F'，

C_1 の内部と領域 E の共通部分を G'とすると，

⑤ の表す領域は，F' と G' の和集合である。



したがって，⑤ の表す領域は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。

よって，図示したものとして最も適当なものは　ソ ④

数学Ⅱ，B，C　第２問

(1)　加法定理から

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ②$$　（ア ①）

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ③$$

② + ③ から

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta \quad \cdots\cdots ④$$

ここで，$\alpha+\beta=A$，$\alpha-\beta=B$ とおくと　$\alpha=\dfrac{A+B}{2}$，$\beta=\dfrac{A-B}{2}$　（イ ④，ウ ⑤）

これらを ④ に代入すると　$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} \quad \cdots\cdots ①$

が得られる。

(2)　① を用いると

$$\begin{aligned}f(x)&=\sin\left(x+\frac{5}{12}\pi\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\\&=2\sin\frac{\left(x+\frac{5}{12}\pi\right)+\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{2}\cos\frac{\left(x+\frac{5}{12}\pi\right)-\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{2}\\&=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{6} \quad （エ ③，オ ②）\\&=2\cos\frac{\pi}{6}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$2\cos\dfrac{\pi}{6}=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ は正の定数であるから，$f(x)$ が最大になるのは

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ が最大のときである。

$0\leqq x<2\pi$ であるから　$\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ は $x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$x=\dfrac{\pi}{4}$ で最大値 1 をとる。

よって，$0\leqq x<2\pi$ の範囲において，

$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{4}$ で最大値 $\sqrt{3}$ をとる。　（カ ③，キ ⑥）

(3)　(i)　$\sin(x+3a)+\sin(x+a)=2\sin\dfrac{(x+3a)+(x+a)}{2}\cos\dfrac{(x+3a)-(x+a)}{2}$

$$=2\sin(x+2a)\cos a$$

$$=2\cos a\sin(x+2a)$$

$2\cos a$ は定数であるから，2 つの関数の和 $\sin(x+a)+\sin(x+3a)$ は $\sin(x+2a)$ の定数倍となる。　（ク ①，ケ ①）

よって　$g(x)=\sin(x+a)+\sin(x+2a)+\sin(x+3a)$

$$=2\cos a\sin(x+2a)+\sin(x+2a)$$

$$=(2\cos a+1)\sin(x+2a) \quad （コ ④）$$

(ii)　(i) より，$a=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$g(x)=\left(2\cos\frac{5}{6}\pi+1\right)\sin\left(x+2\cdot\frac{5}{6}\pi\right)$$
$$=\left\{2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1\right\}\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)$$
$$=(1-\sqrt{3})\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)$$

$1<\sqrt{3}<2$ より $1-\sqrt{3}$ は負の定数であるから，$g(x)$ が最大になるのは

$\sin\left(x+\dfrac{5}{3}\pi\right)$ が最小のときである。

$0\leqq x<2\pi$ であるから　　$\dfrac{5}{3}\pi\leqq x+\dfrac{5}{3}\pi<\dfrac{11}{3}\pi$

$\sin\left(x+\dfrac{5}{3}\pi\right)$ は $x+\dfrac{5}{3}\pi=\dfrac{7}{2}\pi$ すなわち $x=\dfrac{11}{6}\pi$ で最小値 -1 をとる。

よって，$0\leqq x<2\pi$ の範囲において，

$g(x)$ は $x=\dfrac{^{\text{サシ}}11}{_{\text{ス}}6}\pi$ で最大値 $-(1-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1$ をとる。　（$^{\text{セ}}$ ⑧）

数学Ⅱ，B，C　第３問

(1)　(i)　$f'(x)=x^2-4x+3$　（ア ②）

$=(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=1,\ 3$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$f(x)$ は

$x=$ イ1 のとき極大値 $f(1)=\dfrac{1}{3}\cdot1^3-2\cdot1^2+3\cdot1+k=\dfrac{4}{3}+k$ をとる。　（ウ ⑨）

$x=$ エ3 のとき極小値 $f(3)=\dfrac{1}{3}\cdot3^3-2\cdot3^2+3\cdot3+k=k$ をとる。　（オ ⑤）

(ii)　$k=0$ のとき，$f(0)=0$ であり，$f(x)$ は $x=1$ で極大値 $\dfrac{4}{3}$，$x=3$ で極小値 0 をとる。よって，適するグラフは　カ ②

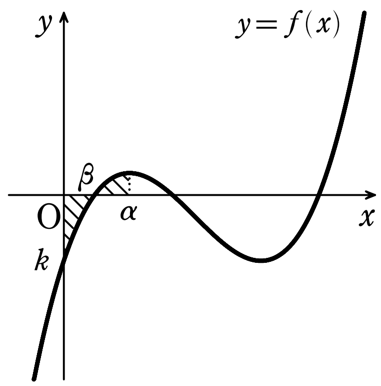
$k>0$ のとき，$f(0)=k>0$ であり，$f(x)$ は $x=1$ で極大値 $\dfrac{4}{3}+k$，$x=3$ で極小値 $k\,(>0)$ をとる。よって，適するグラフは　キ ⓪

(iii)　(i) より，$\alpha=1$ である。

$f(0)<0<f(\alpha)$ すなわち $f(0)<0<f(1)$ から　　$k<0<\dfrac{4}{3}+k$

よって　　$-\dfrac{4}{3}<k<0$　（ク ⑧，ケ ⓪）

このとき，$0\leqq x\leqq\alpha$ の範囲において，$f(x)=0$ を満たす x の値を β とおくと，$y=f(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる。



$0\leqq x\leqq\beta$ の範囲における $y=f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積と，$\beta\leqq x\leqq\alpha$ の範囲における $y=f(x)$ のグラフと x 軸および直線 $x=\alpha$ で囲まれた部分の面積が等しいとき

$$-\int_0^\beta f(x)\,dx=\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$$

$$\int_0^\beta f(x)\,dx+\int_\beta^\alpha f(x)\,dx=0$$

$$\int_0^\alpha f(x)\,dx=0\quad（コ ①）$$

ここで　$\displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+k\right)dx$

$$=\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+kx\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{12}-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+k=\frac{11}{12}+k$$

$\displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,dx=0$ より $\dfrac{11}{12}+k=0$ であるから　　$k=\dfrac{\text{サシス}\,-11}{\text{セソ}\,12}$

(2)　条件 (a) から，$y=g(x)$ のグラフは原点を通り，原点における接線の傾きは正である。

よって，条件 (a) を満たすのは　　タ①，チ②，ツ④　(順不同)

条件 (b) から，$g'(x)=kx^2+l\ (k\neq 0)$ と表される。

$g'(0)>0$ から　　$l>0$

$k>0$ のとき，$y=g'(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり，常に $g'(x)>0$ であるから，$g(x)$ は常に増加することがわかる。これを満たすのは　④

$k<0$ のとき，$y=g'(x)$ のグラフは上に凸の放物線であり，$g'(x)=0$ となる x の値を境に $g'(x)$ の符号は負，正，負と変化することから，$g(x)$ は減少，増加，減少と変化することがわかる。これを満たすのは　①

よって，条件 (b) を満たすのは　　テ①，ト④　(順不同)

さらに，条件 (c) を満たすのは　　ナ④

参考　$y=g(x)$ のグラフの概形から，$g'(x)$ はそれぞれ次のように表される。

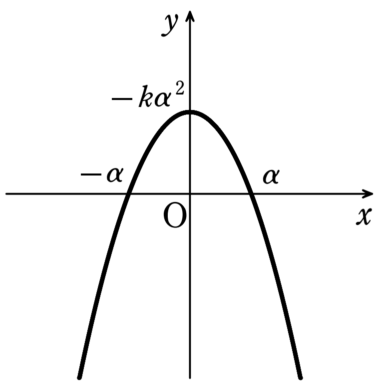
①　$g'(x)=k(x+\alpha)(x-\alpha)$，$\alpha>0$，$k<0$

②　$g'(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$，$\alpha<\beta<0$，$k>0$

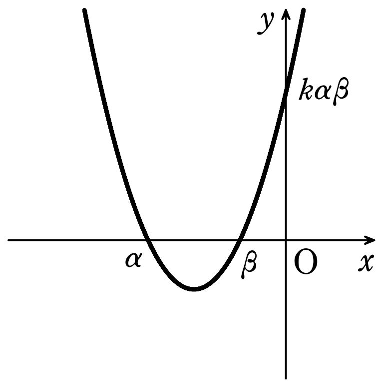
④　$g'(x)=kx^2+l$，$k>0$，$l>0$

$y=g'(x)$ のグラフの概形は次のようになる。

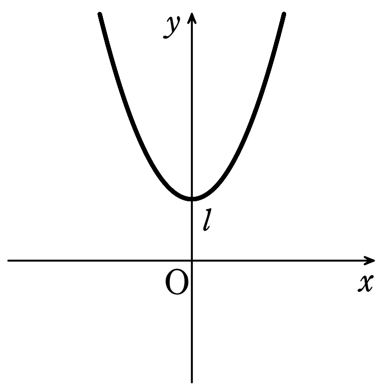
①



②



④



数学Ⅱ，B，C　第 4 問

(1)　(i)　$b_n=4n-1$ から　　$b_1=4\cdot1-1={}^{ア}3$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $\{b_n\}$ であるから　　$a_2=a_1+b_1=1+3={}^{イ}4$

また　　$b_2=4\cdot2-1={}^{ウ}7$

a_2 と同様に考えて　　$a_3=a_2+b_2=4+7={}^{エオ}11$

(ii)　$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。 $\left({}^{カ}⓪\right)$

よって　　$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-1)$

$$=1+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$$

$$={}^{キ}2n^2-{}^{ク}3n+{}^{ケ}2$$

(2)　$c_n=(pn+q)\cdot2^n$ とすると

$$c_{n+1}-c_n=\{p(n+1)+q\}\cdot2^{n+1}-(pn+q)\cdot2^n$$

$$=\{2p(n+1)+2q-(pn+q)\}\cdot2^n$$

$$=\{pn+(2p+q)\}\cdot2^n \quad \left({}^{コ}⓪,\ {}^{サ}⑤\right)$$

数列 $\{c_n\}$ の階差数列が $\{d_n\}$ であるから　　$d_n=c_{n+1}-c_n$

すなわち　　$(2n+1)\cdot2^n=c_{n+1}-c_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　$\cdots\cdots$ ②

よって　　$(2n+1)\cdot2^n=\{pn+(2p+q)\}\cdot2^n$

n について両辺の係数を比較して　　$p=2,\ 2p+q=1$

ゆえに，$p={}^{シ}2$，$q={}^{スセ}-3$ のとき ② が成り立つ。

このとき　　$c_n=(2n-3)\cdot2^n$

ここで，① から　　$\sum_{k=1}^{n-1}b_k=a_n-a_1$

したがって　　$\sum_{k=1}^{n}d_k=c_{n+1}-c_1$

$$=\{2(n+1)-3\}\cdot2^{n+1}-(2\cdot1-3)\cdot2^1$$

$$=(2n-1)\cdot2^{n+1}+{}^{タ}2 \quad \left({}^{ソ}③\right)$$

(3)　(2) と同様に，数列 $\{c_n\}$ の階差数列が $\{d_n\}$ となるもの，すなわち

$$(n^2-n-1)\cdot2^n=c_{n+1}-c_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \quad \cdots\cdots ③$$

となる $\{c_n\}$ を考える。

$\{d_n\}$ の一般項が n の 2 次式と 2^n の積であるから，$\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n=(pn^2+qn+r)\cdot2^n$$

と表されるとする。

このとき　$c_{n+1}-c_n=\{p(n+1)^2+q(n+1)+r\}\cdot 2^{n+1}-(pn^2+qn+r)\cdot 2^n$

$=\{2p(n+1)^2+2q(n+1)+2r-(pn^2+qn+r)\}\cdot 2^n$

$=\{pn^2+(4p+q)n+(2p+2q+r)\}\cdot 2^n$

よって，③ から　$(n^2-n-1)\cdot 2^n=\{pn^2+(4p+q)n+(2p+2q+r)\}\cdot 2^n$

n について両辺の係数を比較して

$$p=1,\ 4p+q=-1,\ 2p+2q+r=-1$$

ゆえに，$p=1$，$q=-5$，$r=7$ のとき ③ が成り立つ。

このとき　$c_n=(n^2-5n+7)\cdot 2^n$

したがって　$\sum_{k=1}^{n} d_k=c_{n+1}-c_1$

$=\{(n+1)^2-5(n+1)+7\}\cdot 2^{n+1}-(1^2-5\cdot 1+7)\cdot 2$

$=(n^2-3n+3)\cdot 2^{n+1}-{}^{ツ}6$　$({}^{チ}\ ⑦)$

数学Ⅱ，B，C　第５問

(1)　受験者の得点 X は平均 116 点，標準偏差 25 点の正規分布 $N(116,\ 25^2)$ に従うから，

$Y=\dfrac{X-116}{25}$ とおくと，Y は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。　(ア ①)

よって，120 点以上である受験者の割合 $P(X\geqq 120)$ は，正規分布表から

$$\begin{aligned}P(X\geqq 120)&=P\left(Y\geqq\frac{120-116}{25}\right)\\&=P(Y\geqq 0.16)\\&=0.5-P(0\leqq Y\leqq 0.16)\\&=0.5-0.0636=0.4364\\&\fallingdotseq 0.44\end{aligned}$$
(イ ⑤)

(2)　(i)　表 1 から，W_i の平均（期待値）$E(W_i)$ は

表 1

W_i	0	1	計
確率	$1-p$	p	1

$$E(W_i)=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$$
(ウ ⓪)

また，W_i の分散 $V(W_i)$ は

$$\begin{aligned}V(W_i)&=\{0-E(W_i)\}^2(1-p)+\{1-E(W_i)\}^2 p\\&=(-p)^2\cdot(1-p)+(1-p)^2\cdot p\\&=p(1-p)\{p+(1-p)\}\\&=p(1-p)\end{aligned}$$
(エ ③)

(ii)　W_1，W_2，……，W_n が，表 1 の確率分布をもつ母集団から抽出した大きさ n の無作為標本であるとき，標本平均 $\overline{W}=\dfrac{W_1+W_2+\cdots\cdots+W_n}{n}$ の期待値 $E(\overline{W})$ と

分散 $V(\overline{W})$ は　　$E(\overline{W})=p$，$V(\overline{W})=\dfrac{p(1-p)}{n}$

n が十分に大きいとき，$\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N\left(p,\ \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$ に従う。　(オ ⑦)

参考　$$\begin{aligned}E(\overline{W})&=E\left(\frac{W_1+W_2+\cdots\cdots+W_n}{n}\right)=\frac{1}{n}\{E(W_1)+E(W_2)+\cdots\cdots+E(W_n)\}\\&=\frac{1}{n}\cdot np=p,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(\overline{W})&=V\left(\frac{W_1+W_2+\cdots\cdots+W_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\{V(W_1)+V(W_2)+\cdots\cdots+V(W_n)\}\\&=\frac{1}{n^2}\cdot np(1-p)=\frac{p(1-p)}{n}\end{aligned}$$

この $\overline{W}$ の確率分布を利用して，p が 0.4 より高いといえるかを，有意水準 5 %（0.05）で仮説検定を行い検証する。

$p\geqq 0.4$ を前提とし，帰無仮説を「$p=0.4$」，対立仮説を「$p>0.4$」として考える。

帰無仮説「$p=0.4$」が正しいと仮定すると，標本の大きさ 400 は十分に大きいから，標本平均 $\overline{W}$ は近似的に平均が 0.4，標準偏差が $\sqrt{\dfrac{0.4\times 0.6}{400}}=\dfrac{\sqrt{6}}{100}$ の正規分布に従う。　(カ ②)

よって，$Z=\dfrac{\overline{W}-0.4}{\dfrac{\sqrt{6}}{100}}=\dfrac{100\overline{W}-40}{\sqrt{6}}$ とおくと，確率変数 Z は近似的に標準正規分布

$N(0,\ 1)$ に従うから，$\sqrt{6}=2.45$ を用いると，正規分布表より

$$\begin{aligned}P\left(\overline{W}\geqq\frac{184}{400}\right)&=P(\overline{W}\geqq 0.46)=P\left(Z\geqq\frac{100\times 0.46-40}{\sqrt{6}}\right)\\&=P(Z\geqq\sqrt{6})=P(Z\geqq 2.45)\\&=0.5-P(0\leqq Z\leqq 2.45)\\&=0.5-0.4929=0.0071\quad(^{キ}\ ②)\end{aligned}$$

この値をパーセント表示すると 0.71 % であり，これは有意水準 5 % より小さいから，帰無仮説は棄却される。　(^{ク} ①)

したがって，有意水準 5 % で A 地域における今年の資格試験の合格率は 0.4 より高いと判断できる。　(^{ケ} ⓪)

(3)　(2) の (ii) と同じ帰無仮説と対立仮説に対して，有意水準 5 % で帰無仮説が棄却されるかどうかを調べる。

帰無仮説「$p=0.4$」が正しいと仮定すると，標本の大きさ 100 は十分に大きいから，(2) の (ii) と同様に，$\overline{W}$ は近似的に平均が 0.4，標準偏差が $\sqrt{\dfrac{0.4\times 0.6}{100}}=\dfrac{\sqrt{6}}{50}$ の正規分布に従う。

よって，$Z'=\dfrac{\overline{W}-0.4}{\dfrac{\sqrt{6}}{50}}=\dfrac{50\overline{W}-20}{\sqrt{6}}$ とおくと，確率変数 Z' は近似的に標準正規分布

$N(0,\ 1)$ に従うから，$\sqrt{6}=2.45$ を用いると

$$\begin{aligned}P\left(\overline{W}\geqq\frac{46}{100}\right)&=P(\overline{W}\geqq 0.46)=P\left(Z'\geqq\frac{50\times 0.46-20}{\sqrt{6}}\right)\\&=P\left(Z'\geqq\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=P(Z'\geqq 1.225)\\&=0.5-P(0\leqq Z'\leqq 1.225)\end{aligned}$$

正規分布表より，$P(0\leqq Z'\leqq 1.22)=0.3888$，$P(0\leqq Z'\leqq 1.23)=0.3907$ であるから

$$0.5-0.3907\leqq 0.5-P(0\leqq Z'\leqq 1.225)\leqq 0.5-0.3888$$

すなわち　　$0.1093\leqq P\left(\overline{W}\geqq\dfrac{46}{100}\right)\leqq 0.1112$

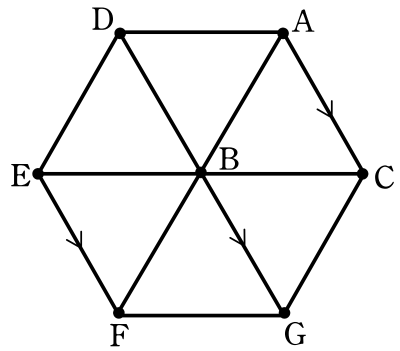
よって，$P\left(\overline{W}\geqq\dfrac{46}{100}\right)$ の値をパーセント表示すると約 11 % であり，これは有意水準 5 % より大きいから，帰無仮説は棄却されない。　(^{コ} ①，^{サ} ①)

数学Ⅱ，B，C　第６問

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+2\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\overrightarrow{\mathrm{MC}}$　……①

Mが A と一致するとき，①から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\overrightarrow{\mathrm{AA}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{FE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}\end{aligned}$$



よって，P は E と一致する。　(ア ④)

M が D と一致するとき，①から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DP}}&=\overrightarrow{\mathrm{DA}}+2\overrightarrow{\mathrm{DB}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}}\\&=2\overrightarrow{\mathrm{DB}}+(\overrightarrow{\mathrm{DA}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}})\\&=2\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{DG}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\overrightarrow{\mathrm{DB}}\end{aligned}$$

よって，P は B と一致する。(イ ①)

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=a\overrightarrow{\mathrm{MA}}+b\overrightarrow{\mathrm{MB}}+c\overrightarrow{\mathrm{MC}}$　……②

②の左辺を，A を始点とするベクトルを用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}\quad(ウ ②)$$

②の右辺を，A を始点とするベクトルを用いて表すと

$$\begin{aligned}a\overrightarrow{\mathrm{MA}}+b\overrightarrow{\mathrm{MB}}+c\overrightarrow{\mathrm{MC}}&=-a\overrightarrow{\mathrm{AM}}+b(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}})+c(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}})\\&=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(-a-b-c)\overrightarrow{\mathrm{AM}}\quad(エ ①,\ オ ②,\ カ ⑦)\end{aligned}$$

したがって，②は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(-a-b-c)\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(1-a-b-c)\overrightarrow{\mathrm{AM}}$　(キ ①，ク ②，ケ ⑨)

A，B，C は定点であるから，M がどの位置にあっても，②を満たす P の位置が変わらないための必要十分条件は　$1-a-b-c=0$

すなわち　$a+b+c=1$　(コ ⑦)

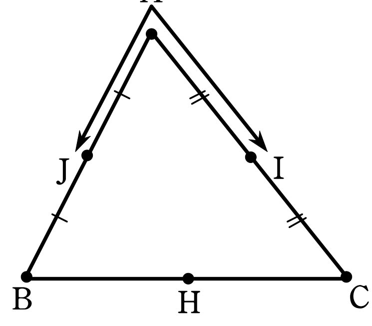
(3)　(i)　a，b，c が，$a+b+c=1$ と $a=\dfrac{1}{2}$ を満たすとき

(2)から，②は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}},\quad b+c=\frac{1}{2}$$

$b+c=\dfrac{1}{2}$ から　$2b+2c=1$

また　$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=2b\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+2c\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\end{aligned}$$



ここで，$2b=b'$，$2c=c'$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=b'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+c'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right),\ b'+c'=1$$

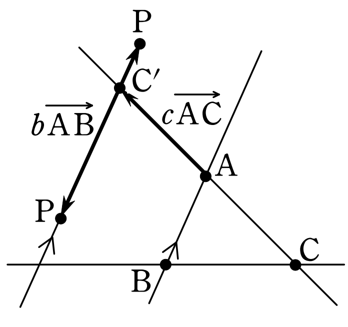
すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=b'\overrightarrow{\mathrm{AJ}}+c'\overrightarrow{\mathrm{AI}}$，$b'+c'=1$

よって，P が存在する範囲は直線 IJ である。　(サ ④)

(ii)　a，b，c が，$a+b+c=1$ と $c<0$ を満たすとき

(2) から ② は

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$c<0$　……③



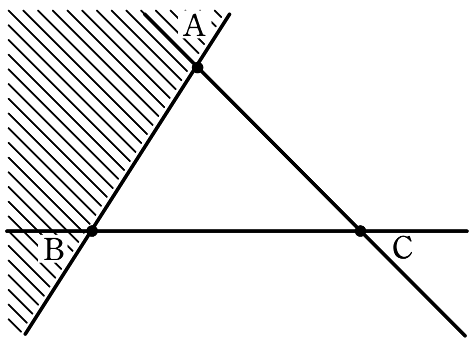
$c\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$ とすると，C′ は直線 AC 上の点で，A に関して C と反対側にある。

よって，③ は

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+b\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

また，b はすべての実数をとりうる。

ゆえに，③ を満たす P が存在する範囲を図示すると次の図の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。　(シ ③)



数学Ⅱ，B，C 第 7 問

(1)　$z=\sqrt{3}+i$ のとき，$|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}={}^{\text{ア}}2$ であり

$$w=z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}+i+\frac{1}{\sqrt{3}+i}=\sqrt{3}+i+\frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$$

$$=\sqrt{3}+i+\frac{\sqrt{3}-i}{4}=\frac{{}^{\text{イ}}5\sqrt{{}^{\text{ウ}}3}}{{}^{\text{エ}}4}+\frac{{}^{\text{オ}}3}{{}^{\text{カ}}4}i$$

別解　$z\overline{z}=|z|^2=2^2=4$ より，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{4}$ であるから

$$w=z+\frac{1}{z}=z+\frac{\overline{z}}{4}=\sqrt{3}+i+\frac{\sqrt{3}-i}{4}=\frac{{}^{\text{イ}}5\sqrt{{}^{\text{ウ}}3}}{{}^{\text{エ}}4}+\frac{{}^{\text{オ}}3}{{}^{\text{カ}}4}i$$

(2)　(i)　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ のとき，$z\overline{z}=|z|^2=r^2$ より

$$\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{r^2}=\frac{r(\cos\theta-i\sin\theta)}{r^2}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

よって　$w=z+\dfrac{1}{z}=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\dfrac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$

$$=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta \quad \cdots\cdots ① \qquad ({}^{\text{キ}}⑥，{}^{\text{ク}}⑨)$$

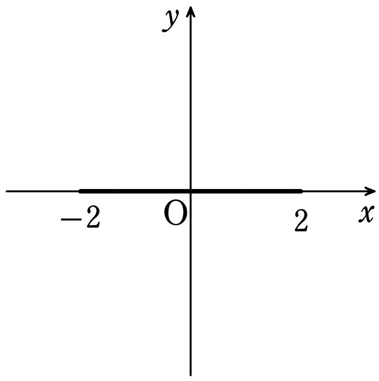
したがって，θ の値によらず $\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta=0$ となる r の値は，$r-\dfrac{1}{r}=0$ すなわち

$r^2=1$ $(r>0)$ から　$r={}^{\text{ケ}}1$

(ii)　$r=1$ のとき，① は　$w=2\cos\theta$

ここで，z が C 上を動くとき，θ は実数全体を動くから　$-2\leqq 2\cos\theta\leqq 2$

よって，w が描く図形は右の図のようになる。(${}^{\text{コ}}$①)



(iii)　① において，$\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta$，$\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$ は実数であるから，$w=x+yi$ (x，y は実数) とおくと

$$x=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta,\quad y=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta \quad \cdots\cdots ②$$

$r\fallingdotseq 1$ のとき，$r+\dfrac{1}{r}\fallingdotseq 0$，$r-\dfrac{1}{r}\fallingdotseq 0$ であるから　$\cos\theta=\dfrac{x}{r+\dfrac{1}{r}}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{r-\dfrac{1}{r}}$

これを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して θ を消去すると

$$\frac{x^2}{\left(r+\dfrac{1}{r}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(r-\dfrac{1}{r}\right)^2}=1 \quad ({}^{\text{サ}}②)$$

参考　$\left(r+\dfrac{1}{r}\right)^2>\left(r-\dfrac{1}{r}\right)^2>0$ より，$r+\dfrac{1}{r}>\left|r-\dfrac{1}{r}\right|>0$ であるから，

$\dfrac{x^2}{\left(r+\dfrac{1}{r}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(r-\dfrac{1}{r}\right)^2}=1$ の表す図形は楕円である。

(3) (i) $w^2=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=z^2+2\cdot z\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=z^2+\frac{1}{z^2}+2$ （シ ③）

(ii) z が C 上を動くとき，z^2 は原点 O を中心とする半径 r^2 の円を描くから，

z^2 の偏角を θ とすると，$z^2=r^2(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表される。

$z^2+\frac{1}{z^2}=X+Yi$ （X，Y は実数）として，(2) の (iii) の結果を利用すると，X，Y は

$$\frac{X^2}{\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)^2}=1 \quad （ス ②） \quad \cdots\cdots ③$$

を満たす。

$w^2=z^2+\frac{1}{z^2}+2=X+2+Yi$ において，$X+2$，Y は実数であるから，

$w^2=x+yi$ （x，y は実数）とおくと　　$x=X+2$，$y=Y$

すなわち　　$X=x-2$，$Y=y$

これを ③ に代入して　　$\frac{(x-2)^2}{\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)^2}=1$ $\cdots\cdots$ ④

$\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)^2>\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)^2>0$ より，$r^2+\frac{1}{r^2}>\left|r^2-\frac{1}{r^2}\right|>0$ であるから，④ は

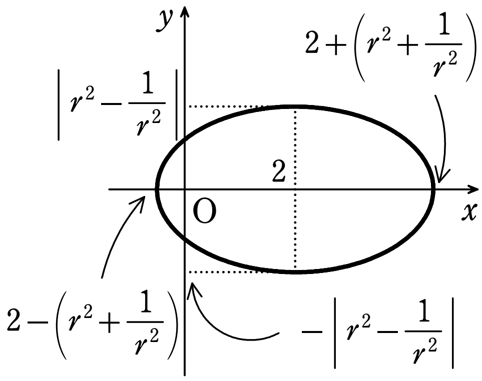
xy 平面上において，中心が点 $(2,\ 0)$，長軸の長さが $2\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)$，短軸の長さが

$2\left|r^2-\frac{1}{r^2}\right|$ の楕円を表す。

ここで，$r^2+\frac{1}{r^2}-2\geqq\left(r-\frac{1}{r}\right)^2>0$ から

$$2-\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)<0$$

したがって，w^2 が描く図形は，右の図のようになる。 （セ ③）



$\boxed{参考}$ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ のとき，ド・モアブルの定理により

$$z^2=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$$

θ が実数全体を動くとき，2θ も実数全体を動くから，z が C 上を動くとき，

z^2 は原点 O を中心とする半径 r^2 の円を描く。

よって，点 $(X,\ Y)$ が描く図形は楕円 $\frac{x^2}{\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)^2}=1$ 全体であり，

w^2 が描く図形も楕円全体となる。