数学Ⅱ, B, C　第 7 問

(1)　$z=\sqrt{3}+i$ のとき，$|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}={}^{\text{ア}}2$ であり

$$w=z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}+i+\frac{1}{\sqrt{3}+i}=\sqrt{3}+i+\frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$$

$$=\sqrt{3}+i+\frac{\sqrt{3}-i}{4}=\frac{{}^{\text{イ}}5\sqrt{{}^{\text{ウ}}3}}{{}^{\text{エ}}4}+\frac{{}^{\text{オ}}3}{{}^{\text{カ}}4}i$$

別解　$z\overline{z}=|z|^2=2^2=4$ より，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{4}$ であるから

$$w=z+\frac{1}{z}=z+\frac{\overline{z}}{4}=\sqrt{3}+i+\frac{\sqrt{3}-i}{4}=\frac{{}^{\text{イ}}5\sqrt{{}^{\text{ウ}}3}}{{}^{\text{エ}}4}+\frac{{}^{\text{オ}}3}{{}^{\text{カ}}4}i$$

(2)　(i)　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ のとき，$z\overline{z}=|z|^2=r^2$ より

$$\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{r^2}=\frac{r(\cos\theta-i\sin\theta)}{r^2}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

よって　　$w=z+\dfrac{1}{z}=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\dfrac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$

$$=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta \quad \cdots\cdots ①$$　（キ ⑥，ク ⑨）

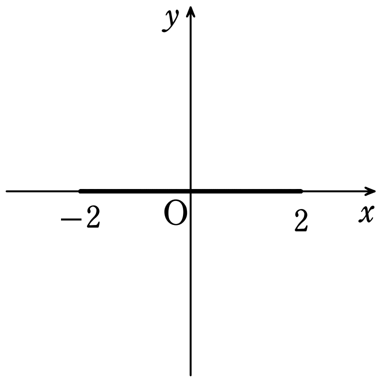
したがって，θ の値によらず $\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta=0$ となる r の値は，$r-\dfrac{1}{r}=0$ すなわち

$r^2=1$ $(r>0)$ から　　$r={}^{\text{ケ}}1$

(ii)　$r=1$ のとき，① は　　$w=2\cos\theta$

ここで，z が C 上を動くとき，θ は実数全体を動くから　$-2\leqq 2\cos\theta\leqq 2$

よって，w が描く図形は右の図のようになる。（コ ①）



(iii)　① において，$\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta$，$\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$ は実数であるから，$w=x+yi$ (x，y は実数) とおくと　　$x=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta$，$y=\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$　$\cdots\cdots$ ②

$r\fallingdotseq 1$ のとき，$r+\dfrac{1}{r}\fallingdotseq 0$，$r-\dfrac{1}{r}\fallingdotseq 0$ であるから　　$\cos\theta=\dfrac{x}{r+\dfrac{1}{r}}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{r-\dfrac{1}{r}}$

これを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して θ を消去すると

$$\frac{x^2}{\left(r+\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}=1$$　（サ ②）

参考　$\left(r+\dfrac{1}{r}\right)^2>\left(r-\dfrac{1}{r}\right)^2>0$ より，$r+\dfrac{1}{r}>\left|r-\dfrac{1}{r}\right|>0$ であるから，

$\dfrac{x^2}{\left(r+\frac{1}{r}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}=1$ の表す図形は楕円である。

(3) (i) $w^2=\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2=z^2+2\cdot z\cdot\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}=z^2+\dfrac{1}{z^2}+2$ (シ ③)

(ii) z が C 上を動くとき，z^2 は原点 O を中心とする半径 r^2 の円を描くから，
z^2 の偏角を θ とすると，$z^2=r^2(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表される。

$z^2+\dfrac{1}{z^2}=X+Yi$ (X，Y は実数) として，(2) の (iii) の結果を利用すると，X，Y は

$$\frac{X^2}{\left(r^2+\dfrac{1}{r^2}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(r^2-\dfrac{1}{r^2}\right)^2}=1 \quad (\text{ス ②}) \quad \cdots\cdots ③$$

を満たす。

$w^2=z^2+\dfrac{1}{z^2}+2=X+2+Yi$ において，$X+2$，Y は実数であるから，

$w^2=x+yi$ (x，y は実数) とおくと　　$x=X+2$，$y=Y$

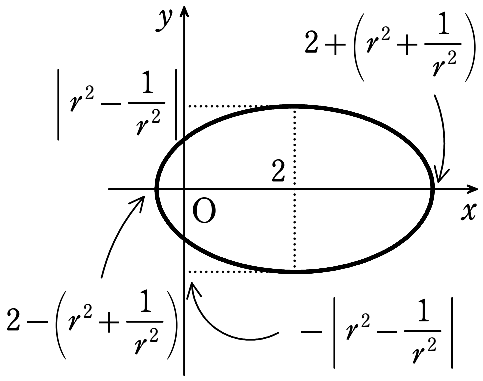
すなわち　　$X=x-2$，$Y=y$

これを ③ に代入して　　$\dfrac{(x-2)^2}{\left(r^2+\dfrac{1}{r^2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(r^2-\dfrac{1}{r^2}\right)^2}=1$ $\cdots\cdots$ ④

$\left(r^2+\dfrac{1}{r^2}\right)^2>\left(r^2-\dfrac{1}{r^2}\right)^2>0$ より，$r^2+\dfrac{1}{r^2}>\left|r^2-\dfrac{1}{r^2}\right|>0$ であるから，④ は

xy 平面上において，中心が点 (2，0)，長軸の長さが $2\left(r^2+\dfrac{1}{r^2}\right)$，短軸の長さが

$2\left|r^2-\dfrac{1}{r^2}\right|$ の楕円を表す。



ここで，$r^2+\dfrac{1}{r^2}-2\geqq\left(r-\dfrac{1}{r}\right)^2>0$ から

$$2-\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)<0$$

したがって，w^2 が描く図形は，右の図のようになる。 (セ ③)

参考　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ のとき，ド・モアブルの定理により

$$z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$

θ が実数全体を動くとき，2θ も実数全体を動くから，z が C 上を動くとき，
z^2 は原点 O を中心とする半径 r^2 の円を描く。

よって，点 (X，Y) が描く図形は楕円 $\dfrac{x^2}{\left(r^2+\dfrac{1}{r^2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(r^2-\dfrac{1}{r^2}\right)^2}=1$ 全体であり，

w^2 が描く図形も楕円全体となる。