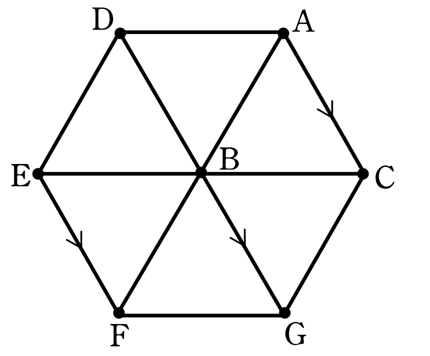
数学Ⅱ，B，C　第６問

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+2\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\overrightarrow{\mathrm{MC}}$　……①

M が A と一致するとき，① から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\overrightarrow{\mathrm{AA}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{FE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}\end{aligned}$$



よって，P は E と一致する。　（ア ④）

M が D と一致するとき，① から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DP}}&=\overrightarrow{\mathrm{DA}}+2\overrightarrow{\mathrm{DB}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}}\\&=2\overrightarrow{\mathrm{DB}}+(\overrightarrow{\mathrm{DA}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}})\\&=2\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{DG}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\overrightarrow{\mathrm{DB}}\end{aligned}$$

よって，P は B と一致する。（イ ①）

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=a\overrightarrow{\mathrm{MA}}+b\overrightarrow{\mathrm{MB}}+c\overrightarrow{\mathrm{MC}}$　……②

② の左辺を，A を始点とするベクトルを用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}\quad（ウ ②）$$

② の右辺を，A を始点とするベクトルを用いて表すと

$$\begin{aligned}a\overrightarrow{\mathrm{MA}}+b\overrightarrow{\mathrm{MB}}+c\overrightarrow{\mathrm{MC}}&=-a\overrightarrow{\mathrm{AM}}+b(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}})+c(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}})\\&=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(-a-b-c)\overrightarrow{\mathrm{AM}}\quad（エ ①，オ ②，カ ⑦）\end{aligned}$$

したがって，② は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(-a-b-c)\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(1-a-b-c)\overrightarrow{\mathrm{AM}}$　（キ ①，ク ②，ケ ⑨）

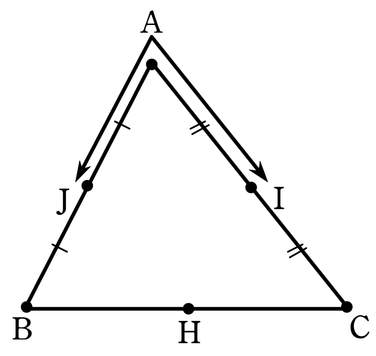
A，B，C は定点であるから，M がどの位置にあっても，② を満たす P の位置が変わらないための必要十分条件は　　$1-a-b-c=0$

すなわち　　$a+b+c=1$　（コ ⑦）

(3)　(i)　a，b，c が，$a+b+c=1$ と $a=\dfrac{1}{2}$ を満たすとき

(2) から，② は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}},\quad b+c=\frac{1}{2}$$



$b+c=\dfrac{1}{2}$ から　　$2b+2c=1$

また　$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=2b\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+2c\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\end{aligned}$$

ここで，$2b=b'$，$2c=c'$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=b'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+c'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right),\ b'+c'=1$$

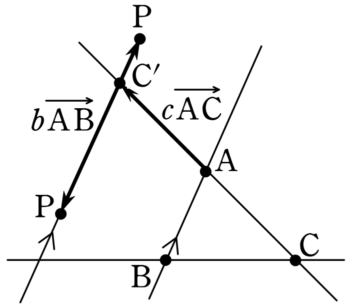
すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=b'\overrightarrow{\mathrm{AJ}}+c'\overrightarrow{\mathrm{AI}}$，$b'+c'=1$

よって，P が存在する範囲は直線 IJ である。　(サ ④)

(ii)　a，b，c が，$a+b+c=1$ と $c<0$ を満たすとき

(2) から ② は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ c<0 \quad \cdots\cdots ③$$



$c\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$ とすると，C′ は直線 AC 上の点で，A に関して C と反対側にある。

よって，③ は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AC'}}+b\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

また，b はすべての実数をとりうる。

ゆえに，③ を満たす P が存在する範囲を図示すると次の図の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。　(シ ③)