数学Ⅱ，B，C　第 5 問

(1)　受験者の得点 X は平均 116 点，標準偏差 25 点の正規分布 $N(116,\ 25^2)$ に従うから，

$Y=\dfrac{X-116}{25}$ とおくと，Y は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。　(ア ①)

よって，120 点以上である受験者の割合 $P(X\geqq 120)$ は，正規分布表から

$$\begin{aligned}P(X\geqq 120)&=P\left(Y\geqq\frac{120-116}{25}\right)\\&=P(Y\geqq 0.16)\\&=0.5-P(0\leqq Y\leqq 0.16)\\&=0.5-0.0636=0.4364\\&\fallingdotseq 0.44\quad(\text{イ ⑤})\end{aligned}$$

(2)　(i)　表 1 から，W_i の平均 (期待値) $E(W_i)$ は

$$E(W_i)=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p\quad(\text{ウ ⓪})$$

表 1

W_i	0	1	計
確率	$1-p$	p	1

また，W_i の分散 $V(W_i)$ は

$$\begin{aligned}V(W_i)&=\{0-E(W_i)\}^2(1-p)+\{1-E(W_i)\}^2p\\&=(-p)^2\cdot(1-p)+(1-p)^2\cdot p\\&=p(1-p)\{p+(1-p)\}\\&=p(1-p)\quad(\text{エ ③})\end{aligned}$$

(ii)　W_1，W_2，……，W_n が，表 1 の確率分布をもつ母集団から抽出した大きさ n の無作為標本であるとき，標本平均 $\overline{W}=\dfrac{W_1+W_2+\cdots\cdots+W_n}{n}$ の期待値 $E(\overline{W})$ と分散 $V(\overline{W})$ は　　$E(\overline{W})=p$，$V(\overline{W})=\dfrac{p(1-p)}{n}$

n が十分に大きいとき，$\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N\left(p,\ \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$ に従う。　(オ ⑦)

参考　$$\begin{aligned}E(\overline{W})&=E\left(\frac{W_1+W_2+\cdots\cdots+W_n}{n}\right)=\frac{1}{n}\{E(W_1)+E(W_2)+\cdots\cdots+E(W_n)\}\\&=\frac{1}{n}\cdot np=p,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(\overline{W})&=V\left(\frac{W_1+W_2+\cdots\cdots+W_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\{V(W_1)+V(W_2)+\cdots\cdots+V(W_n)\}\\&=\frac{1}{n^2}\cdot np(1-p)=\frac{p(1-p)}{n}\end{aligned}$$

この $\overline{W}$ の確率分布を利用して，p が 0.4 より高いといえるかを，有意水準 5 % (0.05) で仮説検定を行い検証する。

$p\geqq 0.4$ を前提とし，帰無仮説を「$p=0.4$」，対立仮説を「$p>0.4$」として考える。

帰無仮説「$p=0.4$」が正しいと仮定すると，標本の大きさ 400 は十分に大きいから，標本平均 $\overline{W}$ は近似的に平均が 0.4，標準偏差が $\sqrt{\dfrac{0.4\times 0.6}{400}}=\dfrac{\sqrt{6}}{100}$ の正規分布に従う。　(カ ②)

よって，$Z=\dfrac{\overline{W}-0.4}{\dfrac{\sqrt{6}}{100}}=\dfrac{100\overline{W}-40}{\sqrt{6}}$ とおくと，確率変数 Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから，$\sqrt{6}=2.45$ を用いると，正規分布表より

$$\begin{aligned}P\left(\overline{W}\geqq\frac{184}{400}\right)&=P(\overline{W}\geqq0.46)=P\left(Z\geqq\frac{100\times0.46-40}{\sqrt{6}}\right)\\&=P(Z\geqq\sqrt{6})=P(Z\geqq2.45)\\&=0.5-P(0\leqq Z\leqq2.45)\\&=0.5-0.4929=0.0071\quad(^{キ}\ ②)\end{aligned}$$

この値をパーセント表示すると 0.71 % であり，これは有意水準 5 % より小さいから，帰無仮説は棄却される。　(^{ク} ①)

したがって，有意水準 5 % で A 地域における今年の資格試験の合格率は 0.4 より高いと判断できる。　(^{ケ} ⓪)

(3)　(2) の (ii) と同じ帰無仮説と対立仮説に対して，有意水準 5 % で帰無仮説が棄却されるかどうかを調べる。

帰無仮説「$p=0.4$」が正しいと仮定すると，標本の大きさ 100 は十分に大きいから，(2) の (ii) と同様に，$\overline{W}$ は近似的に平均が 0.4，標準偏差が $\sqrt{\dfrac{0.4\times0.6}{100}}=\dfrac{\sqrt{6}}{50}$ の正規分布に従う。

よって，$Z'=\dfrac{\overline{W}-0.4}{\dfrac{\sqrt{6}}{50}}=\dfrac{50\overline{W}-20}{\sqrt{6}}$ とおくと，確率変数 Z' は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから，$\sqrt{6}=2.45$ を用いると

$$\begin{aligned}P\left(\overline{W}\geqq\frac{46}{100}\right)&=P(\overline{W}\geqq0.46)=P\left(Z'\geqq\frac{50\times0.46-20}{\sqrt{6}}\right)\\&=P\left(Z'\geqq\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=P(Z'\geqq1.225)\\&=0.5-P(0\leqq Z'\leqq1.225)\end{aligned}$$

正規分布表より，$P(0\leqq Z'\leqq1.22)=0.3888$，$P(0\leqq Z'\leqq1.23)=0.3907$ であるから

$$0.5-0.3907\leqq0.5-P(0\leqq Z'\leqq1.225)\leqq0.5-0.3888$$

すなわち　　$0.1093\leqq P\left(\overline{W}\geqq\dfrac{46}{100}\right)\leqq0.1112$

よって，$P\left(\overline{W}\geqq\dfrac{46}{100}\right)$ の値をパーセント表示すると約 11 % であり，これは有意水準 5 % より大きいから，帰無仮説は棄却されない。　(^{コ} ①，^{サ} ①)