数学Ⅱ，B，C　第４問

(1)　(i)　$b_n=4n-1$ から　　$b_1=4\cdot1-1={}^{ア}3$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $\{b_n\}$ であるから　　$a_2=a_1+b_1=1+3={}^{イ}4$

また　　$b_2=4\cdot2-1={}^{ウ}7$

a_2 と同様に考えて　　$a_3=a_2+b_2=4+7={}^{エオ}11$

(ii)　$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。 $\left({}^{カ}⓪\right)$

よって　　$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-1)$

$$=1+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$$

$$={}^{キ}2n^2-{}^{ク}3n+{}^{ケ}2$$

(2)　$c_n=(pn+q)\cdot2^n$ とすると

$$c_{n+1}-c_n=\{p(n+1)+q\}\cdot2^{n+1}-(pn+q)\cdot2^n$$

$$=\{2p(n+1)+2q-(pn+q)\}\cdot2^n$$

$$=\{pn+(2p+q)\}\cdot2^n \quad \left({}^{コ}⓪,\ {}^{サ}⑤\right)$$

数列 $\{c_n\}$ の階差数列が $\{d_n\}$ であるから　　$d_n=c_{n+1}-c_n$

すなわち　　$(2n+1)\cdot2^n=c_{n+1}-c_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　$\cdots\cdots$ ②

よって　　$(2n+1)\cdot2^n=\{pn+(2p+q)\}\cdot2^n$

n について両辺の係数を比較して　　$p=2,\ 2p+q=1$

ゆえに，$p={}^{シ}2$，$q={}^{スセ}-3$ のとき ② が成り立つ。

このとき　　$c_n=(2n-3)\cdot2^n$

ここで，① から　　$\sum_{k=1}^{n-1}b_k=a_n-a_1$

したがって　　$\sum_{k=1}^{n}d_k=c_{n+1}-c_1$

$$=\{2(n+1)-3\}\cdot2^{n+1}-(2\cdot1-3)\cdot2^1$$

$$=(2n-1)\cdot2^{n+1}+{}^{タ}2 \quad \left({}^{ソ}③\right)$$

(3)　(2) と同様に，数列 $\{c_n\}$ の階差数列が $\{d_n\}$ となるもの，すなわち

$$(n^2-n-1)\cdot2^n=c_{n+1}-c_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \quad \cdots\cdots ③$$

となる $\{c_n\}$ を考える。

$\{d_n\}$ の一般項が n の２次式と 2^n の積であるから，$\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n=(pn^2+qn+r)\cdot2^n$$

と表されるとする。

このとき　$c_{n+1}-c_n=\{p(n+1)^2+q(n+1)+r\}\cdot 2^{n+1}-(pn^2+qn+r)\cdot 2^n$

$=\{2p(n+1)^2+2q(n+1)+2r-(pn^2+qn+r)\}\cdot 2^n$

$=\{pn^2+(4p+q)n+(2p+2q+r)\}\cdot 2^n$

よって，③から　$(n^2-n-1)\cdot 2^n=\{pn^2+(4p+q)n+(2p+2q+r)\}\cdot 2^n$

n について両辺の係数を比較して

$$p=1,\ 4p+q=-1,\ 2p+2q+r=-1$$

ゆえに，$p=1$，$q=-5$，$r=7$ のとき ③ が成り立つ。

このとき　$c_n=(n^2-5n+7)\cdot 2^n$

したがって　$\sum_{k=1}^{n} d_k=c_{n+1}-c_1$

$=\{(n+1)^2-5(n+1)+7\}\cdot 2^{n+1}-(1^2-5\cdot 1+7)\cdot 2$

$=(n^2-3n+3)\cdot 2^{n+1}-{}^{ツ}6$　$\left({}^{チ}\ ⑦\right)$