数学Ⅱ，B，C　第３問

(1)　(i)　$f'(x)=x^2-4x+3$　(ア ②)
$=(x-1)(x-3)$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$f'(x)=0$ とすると　　$x=1,\ 3$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

よって，$f(x)$ は

$x=$ イ 1 のとき極大値 $f(1)=\dfrac{1}{3}\cdot 1^3-2\cdot 1^2+3\cdot 1+k=\dfrac{4}{3}+k$ をとる。　(ウ ⑨)

$x=$ エ 3 のとき極小値 $f(3)=\dfrac{1}{3}\cdot 3^3-2\cdot 3^2+3\cdot 3+k=k$ をとる。　(オ ⑤)

(ii)　$k=0$ のとき，$f(0)=0$ であり，$f(x)$ は $x=1$ で極大値 $\dfrac{4}{3}$，$x=3$ で極小値 0 をとる。よって，適するグラフは　カ ②

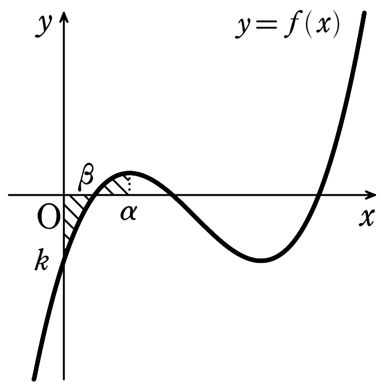
$k>0$ のとき，$f(0)=k>0$ であり，$f(x)$ は $x=1$ で極大値 $\dfrac{4}{3}+k$，$x=3$ で極小値 $k\,(>0)$ をとる。よって，適するグラフは　キ ⓪

(iii)　(i) より，$\alpha=1$ である。

$f(0)<0<f(\alpha)$ すなわち $f(0)<0<f(1)$ から　　$k<0<\dfrac{4}{3}+k$

よって　　$-\dfrac{4}{3}<k<0$　(ク ⑧，ケ ⓪)

このとき，$0\leqq x\leqq\alpha$ の範囲において，$f(x)=0$ を満たす x の値を β とおくと，$y=f(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる。



$0\leqq x\leqq\beta$ の範囲における $y=f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積と，$\beta\leqq x\leqq\alpha$ の範囲における $y=f(x)$ のグラフと x 軸および直線 $x=\alpha$ で囲まれた部分の面積が等しいとき

$$-\int_0^\beta f(x)\,dx=\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$$

$$\int_0^\beta f(x)\,dx+\int_\beta^\alpha f(x)\,dx=0$$

$$\int_0^\alpha f(x)\,dx=0\quad(\text{コ ①})$$

ここで　　$\displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+k\right)dx$

$$=\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+kx\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{12}-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+k=\frac{11}{12}+k$$

$\displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,dx=0$ より $\dfrac{11}{12}+k=0$ であるから　　$k=\dfrac{\text{サシス}\ -11}{\text{セソ}\ 12}$

(2)　条件 (a) から，$y=g(x)$ のグラフは原点を通り，原点における接線の傾きは正である。

よって，条件 (a) を満たすのは　　タ①，チ②，ツ④　(順不同)

条件 (b) から，$g'(x)=kx^2+l\ (k \fallingdotseq 0)$ と表される。

$g'(0)>0$ から　　$l>0$

$k>0$ のとき，$y=g'(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり，常に $g'(x)>0$ であるから，$g(x)$ は常に増加することがわかる。これを満たすのは　④

$k<0$ のとき，$y=g'(x)$ のグラフは上に凸の放物線であり，$g'(x)=0$ となる x の値を境に $g'(x)$ の符号は負，正，負と変化することから，$g(x)$ は減少，増加，減少と変化することがわかる。これを満たすのは　①

よって，条件 (b) を満たすのは　　テ①，ト④　(順不同)

さらに，条件 (c) を満たすのは　　ナ④

参考　$y=g(x)$ のグラフの概形から，$g'(x)$ はそれぞれ次のように表される。

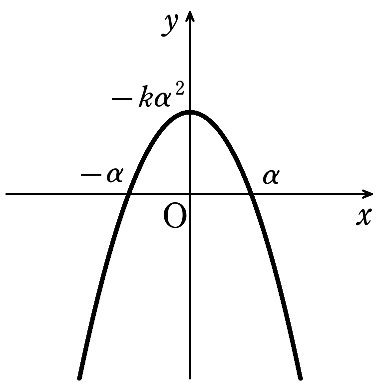
①　$g'(x)=k(x+\alpha)(x-\alpha)$，$\alpha>0$，$k<0$

②　$g'(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$，$\alpha<\beta<0$，$k>0$

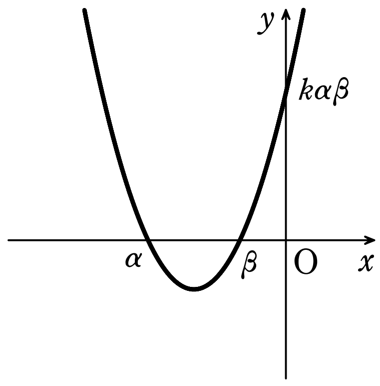
④　$g'(x)=kx^2+l$，$k>0$，$l>0$

$y=g'(x)$ のグラフの概形は次のようになる。

①



②



④