数学Ⅱ, B, C 第 2 問

(1) 加法定理から

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ②\quad ({}^{ア}\,⓪)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ③$$

②＋③ から

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta \quad \cdots\cdots ④$$

ここで，$\alpha+\beta=A$，$\alpha-\beta=B$ とおくと　$\alpha=\dfrac{A+B}{2}$，$\beta=\dfrac{A-B}{2}$　(^{イ} ④，^{ウ} ⑤)

これらを ④ に代入すると　$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$　$\cdots\cdots$ ①

が得られる。

(2) ① を用いると

$$f(x)=\sin\left(x+\frac{5}{12}\pi\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=2\sin\frac{\left(x+\frac{5}{12}\pi\right)+\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{2}\cos\frac{\left(x+\frac{5}{12}\pi\right)-\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{2}$$

$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{6}\quad ({}^{エ}\,③,\ {}^{オ}\,②)$$

$$=2\cos\frac{\pi}{6}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$2\cos\dfrac{\pi}{6}=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ は正の定数であるから，$f(x)$ が最大になるのは

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ が最大のときである。

$0\leqq x<2\pi$ であるから　$\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ は $x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $x=\dfrac{\pi}{4}$ で最大値 1 をとる。

よって，$0\leqq x<2\pi$ の範囲において，

$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{4}$ で最大値 $\sqrt{3}$ をとる。　(^{カ} ③，^{キ} ⑥)

(3) (i)　$\sin(x+3a)+\sin(x+a)=2\sin\dfrac{(x+3a)+(x+a)}{2}\cos\dfrac{(x+3a)-(x+a)}{2}$

$$=2\sin(x+2a)\cos a$$

$$=2\cos a\sin(x+2a)$$

$2\cos a$ は定数であるから，2 つの関数の和 $\sin(x+a)+\sin(x+3a)$ は $\sin(x+2a)$ の定数倍となる。　(^{ク} ①，^{ケ} ①)

よって　$g(x)=\sin(x+a)+\sin(x+2a)+\sin(x+3a)$

$$=2\cos a\sin(x+2a)+\sin(x+2a)$$

$$=(2\cos a+1)\sin(x+2a)\quad ({}^{コ}\,④)$$

(ii) (i) より，$a=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$g(x)=\left(2\cos\frac{5}{6}\pi+1\right)\sin\left(x+2\cdot\frac{5}{6}\pi\right)$$
$$=\left\{2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1\right\}\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)$$
$$=(1-\sqrt{3})\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)$$

$1<\sqrt{3}<2$ より $1-\sqrt{3}$ は負の定数であるから，$g(x)$ が最大になるのは $\sin\left(x+\dfrac{5}{3}\pi\right)$ が最小のときである。

$0\leqq x<2\pi$ であるから　　$\dfrac{5}{3}\pi\leqq x+\dfrac{5}{3}\pi<\dfrac{11}{3}\pi$

$\sin\left(x+\dfrac{5}{3}\pi\right)$ は $x+\dfrac{5}{3}\pi=\dfrac{7}{2}\pi$ すなわち $x=\dfrac{11}{6}\pi$ で最小値 -1 をとる。

よって，$0\leqq x<2\pi$ の範囲において，

$g(x)$ は $x=\dfrac{^{サシ}11}{_{ス}6}\pi$ で最大値 $-(1-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1$ をとる。　（セ ⑧）