数学Ⅰ，A　第１問〔1〕

(1)　$a=3$ のとき，3 の正の約数は　1，3

よって，A は，2 以上 20 以下の自然数で，3 を約数にもつもの全体の集合であるから

$$A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}\quad (^{ア}⑥)$$

$b=4$ のとき，4 の正の約数は　1，2，2^2

よって，B は，2 以上 20 以下の自然数で，2 を約数にもつもの全体の集合であるから

$$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}\quad (^{イ}⑧)$$

ゆえに　　$A\cap B=\{6,\ 12,\ 18\}$　$(^{ウ}③)$

また，B の補集合 $\overline{B}$ は，$\overline{B}=\{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\}$ であるから

$$A\cap\overline{B}=\{3,\ 9,\ 15\}\quad (^{エ}②)$$

(2)　(i)　A の補集合 $\overline{A}$ に，2 の倍数も 3 の倍数もないとき，2 の倍数と 3 の倍数はすべて A の要素である。よって，2 と 3 は A の要素である。

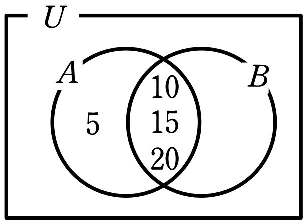
このとき，2 と a は 1 以外の正の公約数をもつから，a は 2 の倍数である。

また，3 と a も 1 以外の正の公約数をもつから，a は 3 の倍数である。

ゆえに，a は 2 の倍数かつ 3 の倍数であるから，a は 6 の倍数である。

a は 2 以上 9 以下の自然数であるから　　$a={}^{オ}6$

(ii)　$A\cap\overline{B}=\{5\}$ より，5 は A の要素であるから，5 と a は 1 以外の正の公約数をもつ。



よって，a は 5 の倍数である。

a は 2 以上 9 以下の自然数であるから　　$a={}^{カ}5$

このとき，$A=\{5,\ 10,\ 15,\ 20\}$ である。これと

$A\cap\overline{B}=\{5\}$から，5 は $\overline{B}$ の要素であり，10，15，20 は B の要素である。

よって，5 は B の要素ではないから，b は 5 の倍数ではない。

また，B の要素である 10，20 は b と 1 以外の正の公約数をもち，b は 5 の倍数ではないから，b は 2 の倍数である。

同様に，15 は B の要素であるから，b は 3 の倍数である。

よって，(i) から　　$b={}^{キ}6$

数学Ⅰ，A 第１問〔2〕

(1)　△ABD と △BCD の面積 S_1，S_2 は

$$S_1=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}{2}\sin A,\ S_2=\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}{2}\sin C\quad(^{ク}①,\ ^{ケ}④)$$

四角形の 4 つの内角の和は 360° であるから　　$A+B+C+D=360°$

よって，$A+C=B+D$ を満たすとき　　$2(A+C)=360°$

ゆえに　　$A+C=180°$　(^{コ}④)

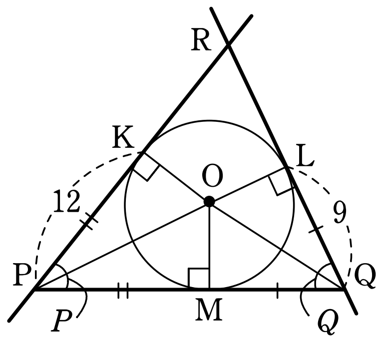
このとき，$C=180°-A$ から　　$\sin C=\sin(180°-A)=\sin A$

よって　　$S=S_1+S_2=\dfrac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}{2}\sin A+\dfrac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}{2}\sin C$

$$=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}{2}\sin A+\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}{2}\sin A$$

$$=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}{2}\sin A\quad(^{サ}②)\quad\cdots\cdots①$$

(2)　(i)　PK＝12，QL＝9 であるとき，△PQR は右の図のようになる。



四角形 PMOK について考える。

円の接線の性質から　　PM＝PK＝12

また　　OM＝OK＝6，PM⊥OM，PK⊥OK

ゆえに，四角形 PMOKの面積は

△PMO＋△PKO

$$=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PM}\cdot\mathrm{OM}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PK}\cdot\mathrm{OK}$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot12\cdot6=^{シス}72$$

ここで，∠PMO＋∠PKO＝90°＋90°＝180° より　　∠KPM＋∠KOM＝180°

よって，① を用いると

$$72=\frac{\mathrm{PM}\cdot\mathrm{PK}+\mathrm{MO}\cdot\mathrm{OK}}{2}\sin P$$

ゆえに　　$72=\dfrac{12\cdot12+6\cdot6}{2}\sin P$　　　よって　　$\sin P=\dfrac{^{セ}4}{^{ソ}5}$

四角形 QMOL についても同様に

QM＝QL＝9，OM＝OL＝6，QM⊥OM，QL⊥OL

ゆえに，四角形 QMOL の面積は

$$\triangle\mathrm{QMO}+\triangle\mathrm{QLO}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{QM}\cdot\mathrm{OM}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{QL}\cdot\mathrm{OL}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot9\cdot6=54$$

ここで，∠LQM＋∠LOM＝180° より，① を用いると

$$54=\frac{\mathrm{QM}\cdot\mathrm{QL}+\mathrm{MO}\cdot\mathrm{OL}}{2}\sin Q$$

ゆえに　　$54=\dfrac{9\cdot9+6\cdot6}{2}\sin Q$　　　よって　　$\sin Q=\dfrac{^{タチ}12}{^{ツテ}13}$

また，△PQR において，正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{PR}}{\sin Q}=\dfrac{\mathrm{QR}}{\sin P}$

よって　$\mathrm{PR}:\mathrm{QR}=\sin Q:\sin P=\dfrac{12}{13}:\dfrac{4}{5}={}^{\text{トナ}}15:{}^{\text{ニヌ}}13$

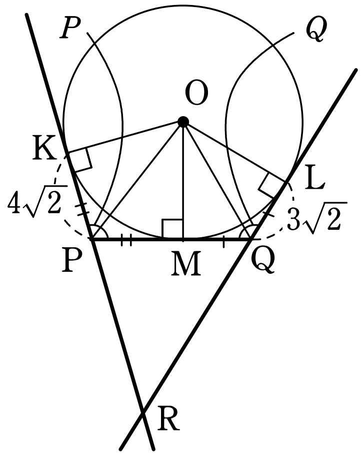
$\mathrm{RL}=x$ とすると　$\mathrm{RK}=\mathrm{RL}=x$

$\mathrm{PR}=x+12$，$\mathrm{QR}=x+9$ であるから　$(x+12):(x+9)=15:13$

よって　$13(x+12)=15(x+9)$　整理して　$2x=21$

ゆえに　$x=\dfrac{{}^{\text{ネノ}}21}{{}^{\text{ハ}}2}$

(ii)　$\mathrm{PK}=4\sqrt{2}$，$\mathrm{QL}=3\sqrt{2}$ であるとき，△PQR は右の図のようになる。



$\angle\mathrm{KPM}=P$，$\angle\mathrm{LQM}=Q$ とし，(i) と同様に考える。

$\mathrm{PM}=\mathrm{PK}=4\sqrt{2}$，$\mathrm{OM}=\mathrm{OK}=6$，$\mathrm{PM}\perp\mathrm{OM}$，$\mathrm{PK}\perp\mathrm{OK}$ であるから，四角形 PMOK の面積は

$$\triangle\mathrm{PMO}+\triangle\mathrm{PKO}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot6=24\sqrt{2}$$

よって，① を用いると

$$24\sqrt{2}=\frac{\mathrm{PM}\cdot\mathrm{PK}+\mathrm{MO}\cdot\mathrm{OK}}{2}\sin P$$

ゆえに　$\sin P=\dfrac{12\sqrt{2}}{17}$

また，$\mathrm{QM}=\mathrm{QL}=3\sqrt{2}$，$\mathrm{OM}=\mathrm{OL}=6$，$\mathrm{QM}\perp\mathrm{OM}$，$\mathrm{QL}\perp\mathrm{OL}$ であるから，四角形 QMOL の面積は

$$\triangle\mathrm{QMO}+\triangle\mathrm{QLO}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot6=18\sqrt{2}$$

よって，① を用いると

$$18\sqrt{2}=\frac{\mathrm{QM}\cdot\mathrm{QL}+\mathrm{MO}\cdot\mathrm{OL}}{2}\sin Q$$

ゆえに　$\sin Q=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

また，△PQR において，正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{PR}}{\sin(180^\circ-Q)}=\dfrac{\mathrm{QR}}{\sin(180^\circ-P)}$

ゆえに　$\mathrm{PR}:\mathrm{QR}=\sin(180^\circ-Q):\sin(180^\circ-P)=\sin Q:\sin P$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}:\frac{12\sqrt{2}}{17}=17:18$$

$\mathrm{RL}=y$ とすると　$\mathrm{RK}=\mathrm{RL}=y$

$\mathrm{PR}=y-4\sqrt{2}$，$\mathrm{QR}=y-3\sqrt{2}$ であるから　$(y-4\sqrt{2}):(y-3\sqrt{2})=17:18$

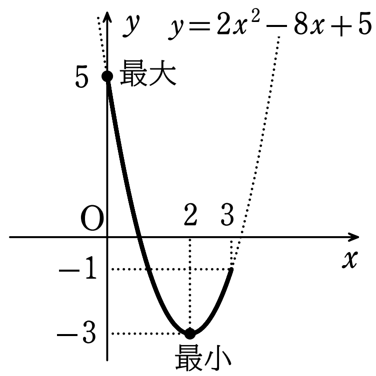
よって　$18(y-4\sqrt{2})=17(y-3\sqrt{2})$

ゆえに　$y={}^{\text{ヒフ}}21\sqrt{{}^{\text{ヘ}}2}$

数学Ⅰ，A　第２問〔1〕

(1)　$y=2x^2-8x+5=2(x-2)^2-3$

よって，2 次関数 $y=2x^2-8x+5$ は $0 \leqq x \leqq 3$ において，$x=$ ア0 で最大値 イ5 をとり，$x=$ ウ2 で最小値 エオ-3 をとる。



(2)　(i)　$y=f(x)$ は $-3 \leqq x \leqq 0$ において $x=-1$ で最大値 3 をとるから，$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，頂点の座標は $(-1,\ 3)$ である。　(カ ③)

よって，求める 2 次関数は $f(x)=p(x+1)^2+3\ (p<0)$ と表される。

このとき，$y=f(x)$ は $-3 \leqq x \leqq 0$ において $x=-3$ で最小となるから

$$f(-3)=-5$$

ゆえに　　$-5=p(-3+1)^2+3$

よって　　$-5=4p+3$　　　　ゆえに　　$p=-2$

これは，$p<0$ を満たす。

よって　　$f(x)=-2(x+1)^2+3=$ キク$-2x^2-$ ケ$4x+$ コ1

(ii)　$y=g(x)$ のグラフが上に凸の放物線であるとする。

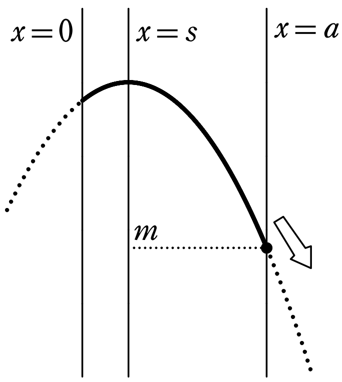
$g(x)$ が $x=a$ で最小となるとき，図のように a を大きくしていくと，$g(x)$ のとりうる値はいくらでも小さくなり，最小値 m はいくらでも小さくなる。

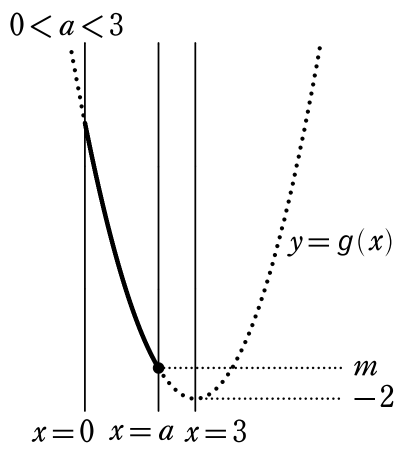
これは条件 2 の「$a \geqq 3$ ならば，$m=-2$ である」を満たさない。

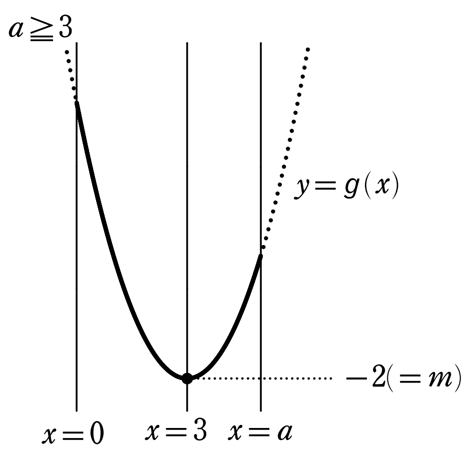
よって，$y=g(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。

このとき，条件 2 の「$0<a<3$ ならば，$m>-2$ である。」，「$a \geqq 3$ ならば，$m=-2$ である。」から，

$y=g(x)$ のグラフの頂点は　　$(3,\ -2)$



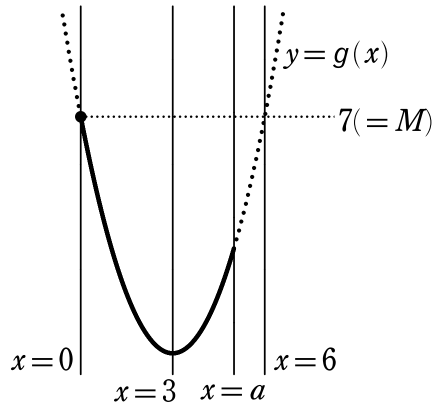




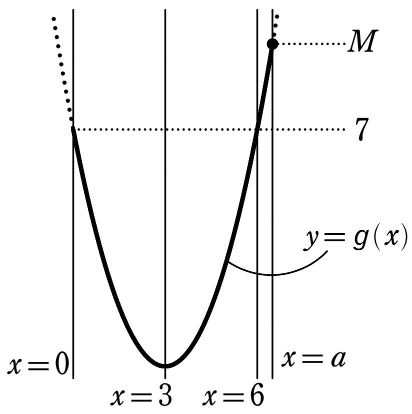
ゆえに，$g(x)=q(x-3)^2-2\ (q>0)$ ……① と表される。

さらに，条件 2 の「$0<a\leqq6$ ならば，$M=7$ である。」，「$a>6$ ならば，$M>7$ である。」から　　$g(0)=7$　…… ②

$0<a\leqq6$



$a>6$



よって，① で $x=0$ とすると，② から　　$7=q(0-3)^2-2$

ゆえに　　$9=9q$　　　　よって　　$q=1$

これは，$q>0$ を満たす。

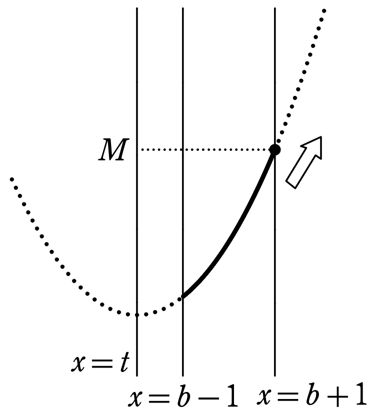
ゆえに　　$g(x)=(x-3)^2-2=x^2-6x+7$

これは条件 2 を満たす。

したがって，2 次関数 $y=g(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり，

$g(x)=x^2-6x+7$ である。（サ ⓪，シ ⑥）

(3)　$y=h(x)$ のグラフが下に凸の放物線であるとする。



$h(x)$ が $x=b+1$ で最大となるとき，図のように b を大きくしていくと，$h(x)$ のとりうる値はいくらでも大きくなり，最大値 M はいくらでも大きくなる。

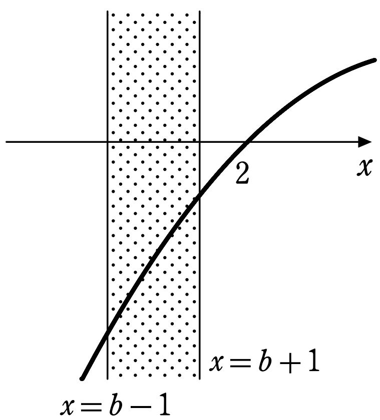
これは条件 3 の「$b<1$ または $7<b$ ならば，$M<0$ である。」を満たさない。

よって，$y=h(x)$ のグラフは上に凸の放物線である。

ここで，条件 3 より

$b=1$ のとき　$M\geqq0$，$b<1$ のとき　$M<0$

$b<1$ のとき，$b-1\leqq x\leqq b+1$ において $h(x)<0$ であり，$b=1$ のとき，$b-1\leqq x\leqq b+1$ すなわち $0\leqq x\leqq2$ において $M\geqq0$ であることに注意すると，$y=h(x)$ のグラフは右の図のようになり，$b=1$ のとき，$h(x)$ は $x=2$ で最大値 M をとる。



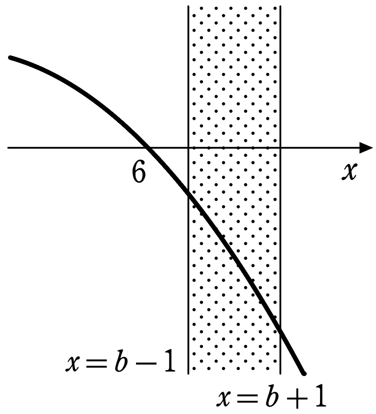
$b=1$ のとき，$M\geqq0$ であることと，$0\leqq x<2$ において $h(x)<0$ であることから　　$M=0$

よって　　$h(2)=0$

また，条件 3 より

$b=7$ のとき　$M \geqq 0$，$7<b$ のとき　$M<0$

$h(2)=0$ を示したときと同様に考えると，$y=h(x)$ のグラフは右の図のようになり　　$h(6)=0$



よって，$h(x)=r(x-2)(x-6)$ $(r<0)$ と表され，これは条件 3 を満たす。

したがって，$y=h(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は

[ス]2，[セ]6（または [ス]6，[セ]2）

数学Ⅰ，A　第２問〔2〕

(1)　(a)　$T_{前}$ が 470 秒未満である選手について，$T_{後}$ が 460 秒以上である選手の人数は，

図 1 から　　7 人

$T_{前}$ が 470 秒未満である選手について，$T_{前後}$ が 460 秒以上である選手の人数は，図 2 から　　3 人

よって，誤り。

(b)　A を付している点が表す選手について，図 2 から

$$(T_{前}\text{の値})<460 \quad \text{かつ} \quad (T_{前後}\text{の値})>460$$

よって，$T_{前}$ の値は $T_{前後}$ の値より小さい。

また，図 1 から　　$(T_{後}\text{の値})>470$

図 2 から　　$(T_{前後}\text{の値})<470$

ゆえに，$T_{後}$ の値は $T_{前後}$ の値より大きい。

よって，正しい。

ゆえに，(a)，(b) の正誤の組合せとして正しいものは ソ ② である。

(2)　表 1 から，$T_{前}$ と $T_{前後}$ の相関係数は　　$\dfrac{72.9}{8.3\times9.3}\fallingdotseq0.94$　（タ ⑥）

(3)　(i)　与えられた外れ値の定義から，30 個のタイムの第 1 四分位数を Q_1，第 3 四分位数を Q_3 とすると

$$Q_1-1.5(Q_3-Q_1)=29.315 \quad \cdots\cdots ①,$$

$$Q_3+1.5(Q_3-Q_1)=29.835 \quad \cdots\cdots ②$$

②－① から　　$Q_3-Q_1+3(Q_3-Q_1)=0.52$

整理すると　　$4(Q_3-Q_1)=0.52$

よって　　$Q_3-Q_1=0.13$

ゆえに，求める四分位範囲は 0.チツ13 秒である。

(ii)　(a)　29 秒より速いタイムは，26 位の選手と 21 位の選手のタイムにおいて外れ値ではないから，誤り。

(b)　12 位の選手と 4 位の選手について，4 位の選手の方が 12 位の選手よりも分散は大きいが，明らかに四分位範囲は小さいから，正しい。

よって，(a)，(b) の正誤の組合せとして正しいものは テ ② である。

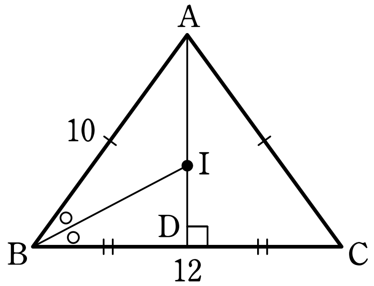
(iii)　決勝進出グループであり，分散が小さい方から 14 番目までの選手は，分散が小さい順に 1 位，6 位，4 位，3 位，2 位，8 位，5 位の選手であるから　　$n=$ ト7

よって　　$P=\dfrac{7}{8}$，$Q=\dfrac{14-7}{20}=\dfrac{7}{20}$

ゆえに　　$P>Q$　（ナ ②）

数学Ⅰ，A　第３問

(1)　直線 AI は $\angle\mathrm{BAC}$ の二等分線であり，$\triangle\mathrm{ABC}$ は $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形であるから，直線 AI と辺 BC の交点 D は辺 BC の中点であり，$\mathrm{AD}\perp\mathrm{BC}$ が成り立つ。



よって　　$\mathrm{BD}=\dfrac{12}{2}=6$

$\triangle\mathrm{ABD}$ において，三平方の定理により

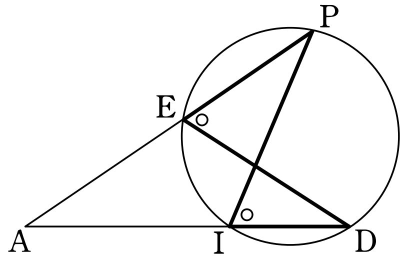
$$\mathrm{AD}=\sqrt{10^2-6^2}=8$$

ここで，I は $\triangle\mathrm{ABC}$ の内心であるから，直線 BI は $\angle\mathrm{ABC}$ を 2 等分する。（ア ②）

よって，$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{BA}:\mathrm{BD}=10:6=5:3$ が成り立つ。

したがって　　$\mathrm{AI}=\dfrac{5}{5+3}\times 8={}^{\text{イ}}5$，$\mathrm{ID}=\dfrac{3}{5+3}\times 8={}^{\text{ウ}}3$

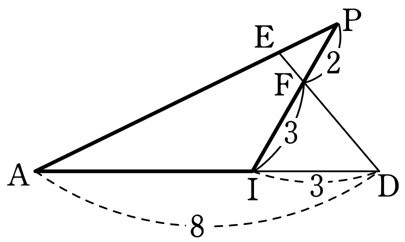
また，点 E は $\angle\mathrm{PED}=\angle\mathrm{PID}$ を満たし，点 E，I は直線 PD に関して同じ側にあるから，円周角の定理の逆により，4 点 E，I，D，P は同一円周上にある。（エ ④）



よって，方べきの定理により

$$\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AP}=\mathrm{AI}\cdot\mathrm{AD}=5\cdot 8={}^{\text{オカ}}40$$

(2)　(i)　$\triangle\mathrm{AIP}$ と直線 DE にメネラウスの定理を



用いると　　$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DI}}\cdot\dfrac{\mathrm{IF}}{\mathrm{FP}}\cdot\dfrac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EA}}=1$

すなわち　　$\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EA}}=1$

よって　　$\dfrac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EA}}=\dfrac{1}{4}$

したがって　$\mathrm{PE}:\mathrm{EA}={}^{\text{キ}}1:{}^{\text{ク}}4$

$\mathrm{PE}:\mathrm{EA}=1:4$ より　　$\mathrm{AE}=\dfrac{4}{5}\mathrm{AP}$

$\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AP}=40$ に代入して　　$\dfrac{4}{5}\mathrm{AP}^2=40$　　　すなわち　　$\mathrm{AP}^2=50$

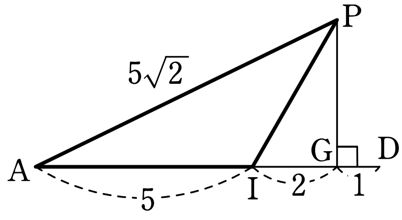
$\mathrm{AP}>0$ より　　$\mathrm{AP}={}^{\text{ケ}}5\sqrt{{}^{\text{コ}}2}$

線分 ID は辺 BC の垂直二等分線であり，G は $\triangle\mathrm{IBC}$ の重心であるから，G は線分 ID 上にあり，$\mathrm{IG}:\mathrm{GD}=2:1$ が成り立つ。

$\mathrm{ID}=3$ であるから　　$\mathrm{IG}=\dfrac{2}{2+1}\cdot 3=2$

よって　　$\mathrm{AG}=\mathrm{AI}+\mathrm{IG}=5+2=7$

直線 PG は $\triangle\mathrm{ABC}$ を含む平面に垂直であるから，$\mathrm{AD}\perp\mathrm{GP}$ が成り立つ。



したがって，$\triangle\mathrm{AGP}$ において三平方の定理により　　$\mathrm{PG}=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-7^2}=1$

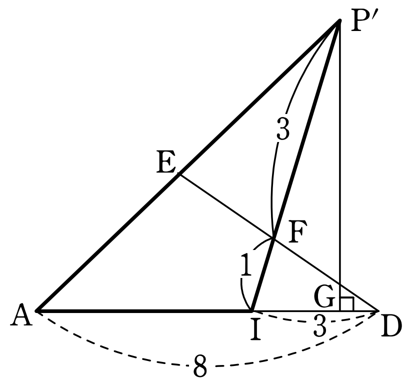
また，△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{BC}\cdot \mathrm{AD}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8=48$$

以上より，求める体積 V_1 は

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot S\cdot \mathrm{PG}=\frac{1}{3}\cdot 48\cdot 1={}^{\text{サシ}}16$$

(ii) 仮定 2 を満たす点 P を点 P′ とする。



△AIP′ と直線 DE にメネラウスの定理を

用いると $\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DI}}\cdot\dfrac{\mathrm{IF}}{\mathrm{FP'}}\cdot\dfrac{\mathrm{P'E}}{\mathrm{EA}}=1$

すなわち $\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\mathrm{P'E}}{\mathrm{EA}}=1$

よって $\dfrac{\mathrm{P'E}}{\mathrm{EA}}=\dfrac{9}{8}$

したがって　P′E：EA＝9：8

P′E：EA＝9：8 より　$\mathrm{AE}=\dfrac{8}{17}\mathrm{AP'}$

AE・AP′＝40 に代入して　$\dfrac{8}{17}\mathrm{AP'}^2=40$　　すなわち　$\mathrm{AP'}^2=85$

AP′＞0 より　$\mathrm{AP'}=\sqrt{85}$

△AGP′ において三平方の定理により

$$\mathrm{P'G}=\sqrt{(\sqrt{85})^2-7^2}=6$$

したがって，V_2 と V_1 の比は

$$V_2:V_1=\frac{1}{3}\cdot S\cdot \mathrm{P'G}:\frac{1}{3}\cdot S\cdot \mathrm{PG}=\mathrm{P'G}:\mathrm{PG}={}^{\text{ス}}6:{}^{\text{セ}}1$$

であるから，V_2 は V_1 より大きい。（$^{\text{ソ}}$ ②）

数学Ⅰ，A 第４問

(1) (i) A が 2 勝 0 敗で優勝するとき，B と C の対戦はどちらが勝ってもよいから，

求める確率は $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times 1=\dfrac{^{ア}4}{^{イ}9}$

(ii) A が B に勝ち，A が C に負け，B が C に勝つ確率は

$$\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{^{ウ}1}{^{エ}9}$$

このとき，抽選は 3 人で行われるから，対戦結果が表 2 のようになり，かつ A が

抽選により優勝者に選ばれる確率は $\dfrac{1}{9}\times\dfrac{^{オ}1}{^{カ}3}=\dfrac{1}{27}$

A が C に勝つ場合も確率は同じであるから，A が 1 勝 1 敗で優勝する確率は

$$2\times\frac{1}{27}=\frac{^{キ}2}{^{クケ}27}$$

(i)，(ii) より，A が優勝する確率は $\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{27}=\dfrac{14}{27}$

(2) (i) D が全敗するのは，A が D に勝ち，B が D に勝ち，C が D に勝つときであり，A と B，A と C，B と C の対戦はどちらが勝ってもよいから，求める確率は

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1^3=\frac{^{コ}1}{^{サ}6}$$

D が全敗したとき，A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は，(1) (ii) より $\dfrac{2}{27}$ であるから，

D が全敗し，かつ A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{2}{27}=\frac{1}{81}$$

全敗する人が B，C の場合も確率は同じであるから，A が 2 勝 1 敗で優勝する確率

は $3\times\dfrac{1}{81}=\dfrac{^{シ}1}{^{スセ}27}$

(ii) 全敗する人がいない場合で，かつ A が B に負け C と D に勝ち優勝するときの対戦結果は，次の $^{ソ}4$ 通りある。

＼	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A	＼	×	○	○	2	1	◎
B	○	＼	○	×	2	1	◎
C	×	×	＼	○	1	2	−
D	×	○	×	＼	1	2	−

＼	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A	＼	×	○	○	2	1	◎
B	○	＼	×	○	2	1	◎
C	×	○	＼	×	1	2	−
D	×	×	○	＼	1	2	−

＼	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A	＼	×	○	○	2	1	◎
B	○	＼	×	×	1	2	−
C	×	○	＼	○	2	1	◎
D	×	○	×	＼	1	2	−

＼	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A	＼	×	○	○	2	1	◎
B	○	＼	×	×	1	2	−
C	×	○	＼	×	1	2	−
D	×	○	○	＼	2	1	◎

対戦結果が上の表のようになる確率は，4 通りとも同じである。

また，いずれの場合も2人で抽選が行われるから，全敗する人がいない場合で，かつAがBに負けCとDに勝ち優勝する確率は

$$4\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{27}$$

全敗する人がいない場合で，かつAがCだけに負ける確率，Dだけに負ける確率も同じであるから，Aが2勝1敗で優勝する確率は

$$3\times\frac{1}{27}=\frac{{}^{タ}1}{{}^{チ}9}$$

(i)，(ii) より，Aが2勝1敗で優勝する確率は

$$\frac{1}{27}+\frac{1}{9}=\frac{4}{27}$$

Aが3勝0敗で優勝する確率は，BとC，BとD，CとDの対戦はどちらが勝ってもよいから　$\left(\frac{2}{3}\right)^3\times 1^3=\frac{8}{27}$

よって，Aが優勝する確率は　$\frac{8}{27}+\frac{4}{27}=\frac{{}^{ツ}4}{{}^{テ}9}$

この確率は，3人でリーグ戦を行うときにAが優勝する確率より $\frac{14}{27}-\frac{4}{9}=\frac{{}^{ト}2}{{}^{ナニ}27}$

だけ小さい。（^{ヌ}⓪）