

数学Ⅰ，A 第4問

(1) (i) A が2勝0敗で優勝するとき, B と C の対戦はどちらが勝ってもよいから,

$$\text{求める確率は } \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{4}{9}$$

(ii) A が B に勝ち, A が C に負け, B が C に勝つ確率は

$$\frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$$

このとき, 抽選は3人で行われるから, 対戦結果が表2のようになり, かつ A が

$$\text{抽選により優勝者に選ばれる確率は } \frac{1}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

A が C に勝つ場合も確率は同じであるから, A が1勝1敗で優勝する確率は

$$2 \times \frac{1}{27} = \frac{2}{27}$$

$$(i), (ii) \text{ より, A が優勝する確率は } \frac{4}{9} + \frac{2}{27} = \frac{14}{27}$$

(2) (i) D が全敗するのは, A が D に勝ち, B が D に勝ち, C が D に勝つときであり, A と B, A と C, B と C の対戦はどちらが勝ってもよいから, 求める確率は

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1^3 = \frac{1}{6}$$

D が全敗したとき, A が2勝1敗で優勝する確率は, (1)(ii) より $\frac{2}{27}$ であるから,

D が全敗し, かつ A が2勝1敗で優勝する確率は

$$\frac{1}{6} \times \frac{2}{27} = \frac{1}{81}$$

全敗する人が B, C の場合も確率は同じであるから, A が2勝1敗で優勝する確率

$$\text{は } 3 \times \frac{1}{81} = \frac{1}{27}$$

(ii) 全敗する人がいない場合で, かつ A が B に負け C と D に勝ち優勝するときの対戦結果は, 次の4通りある。

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A	X	O	O	O	2	1	◎
B	O	X	X	X	2	1	◎
C	X	X	X	O	1	2	-
D	X	O	X	X	1	2	-

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A	X	O	O	O	2	1	◎
B	O	X	X	X	2	1	◎
C	X	O	X	X	1	2	-
D	X	O	O	X	1	2	-

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A	X	O	O	O	2	1	◎
B	O	X	X	X	1	2	-
C	X	O	X	X	1	2	◎
D	X	O	X	X	1	2	-

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A	X	O	O	O	2	1	◎
B	O	X	X	X	1	2	-
C	X	O	X	X	1	2	-
D	X	O	O	X	2	1	◎

対戦結果が上の表のようになる確率は, 4通りとも同じである。

また、いずれの場合も 2 人で抽選が行われるから、全敗する人がいない場合で、かつ A が B に負け C と D に勝ち優勝する確率は

$$4 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{27}$$

全敗する人がいない場合で、かつ A が C だけに負ける確率、D だけに負ける確率も同じであるから、A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は

$$3 \times \frac{1}{27} = \frac{1}{9}$$

(i), (ii) より、A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は

$$\frac{1}{27} + \frac{1}{9} = \frac{4}{27}$$

A が 3 勝 0 敗で優勝する確率は、B と C, B と D, C と D の対戦はどちらが勝っても

よいから $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 1^3 = \frac{8}{27}$

よって、A が優勝する確率は $\frac{8}{27} + \frac{4}{27} = \frac{4}{9}$

この確率は、3 人でリーグ戦を行うときに A が優勝する確率より $\frac{14}{27} - \frac{4}{9} = \frac{2}{27}$

だけ小さい。^(*) ①