

数学 I , A 第 4 問

- (1) (i) A が 2 勝 0 敗で優勝するとき, B と C の対戦はどちらが勝ってもよいから,

$$\text{求める確率は} \quad \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{4}{9}$$

- (ii) A が B に勝ち, A が C に負け, B が C に勝つ確率は

$$\frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$$

このとき, 抽選は 3 人で行われるから, 対戦結果が表 2 のようになり, かつ A が

$$\text{抽選により優勝者に選ばれる確率は} \quad \frac{1}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

A が C に勝つ場合も確率は同じであるから, A が 1 勝 1 敗で優勝する確率は

$$2 \times \frac{1}{27} = \frac{2}{27}$$

- (i), (ii) より, A が優勝する確率は $\frac{4}{9} + \frac{2}{27} = \frac{14}{27}$

- (2) (i) D が全敗するのは, A が D に勝ち, B が D に勝ち, C が D に勝つときであり, A と B, A と C, B と C の対戦はどちらが勝ってもよいから, 求める確率は

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1^3 = \frac{1}{6}$$

D が全敗したとき, A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は, (1)(ii) より $\frac{2}{27}$ であるから,

D が全敗し, かつ A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は

$$\frac{1}{6} \times \frac{2}{27} = \frac{1}{81}$$

全敗する人が B, C の場合も確率は同じであるから, A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は

$$\text{は} \quad 3 \times \frac{1}{81} = \frac{1}{27}$$

- (ii) 全敗する人がいない場合で, かつ A が B に負け C と D に勝ち優勝するときの対戦結果は, 次の 4 通りある。

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A		×	○	○	2	1	◎
B	○		○	×	2	1	◎
C	×	×		○	1	2	—
D	×	○	×		1	2	—

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A		×	○	○	2	1	◎
B	○		×	○	2	1	◎
C	×	○		×	1	2	—
D	×	×	○		1	2	—

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A		×	○	○	2	1	◎
B	○		×	×	1	2	—
C	×	○		○	2	1	◎
D	×	○	×		1	2	—

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A		×	○	○	2	1	◎
B	○		×	×	1	2	—
C	×	○		×	1	2	—
D	×	○	○		2	1	◎

対戦結果が上の表のようになる確率は, 4 通りとも同じである。

また、いずれの場合も 2 人で抽選が行われるから、全敗する人がいない場合で、かつ A が B に負け C と D に勝ち優勝する確率は

$$4 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{27}$$

全敗する人がいない場合で、かつ A が C だけに負ける確率、D だけに負ける確率も同じであるから、A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は

$$3 \times \frac{1}{27} = \frac{\overset{\text{タ}}{1}}{\underset{\text{チ}}{9}}$$

(i), (ii) より、A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は

$$\frac{1}{27} + \frac{1}{9} = \frac{4}{27}$$

A が 3 勝 0 敗で優勝する確率は、B と C、B と D、C と D の対戦はどちらが勝っても

よいから $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 1^3 = \frac{8}{27}$

よって、A が優勝する確率は $\frac{8}{27} + \frac{4}{27} = \frac{\overset{\text{ツ}}{4}}{\underset{\text{テ}}{9}}$

この確率は、3 人でリーグ戦を行うときに A が優勝する確率より $\frac{14}{27} - \frac{4}{9} = \frac{\overset{\text{ト}}{2}}{\underset{\text{ナニ}}{27}}$

だけ小さい。(ㄨ ㊸)