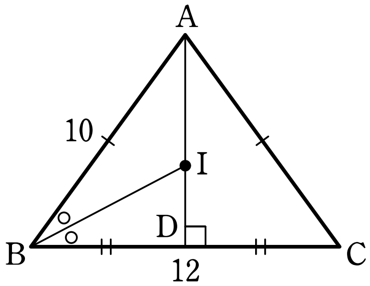
数学Ⅰ，A 第３問

(1)　直線 AI は $\angle$BAC の二等分線であり，$\triangle$ABC は AB＝AC の二等辺三角形であるから，直線 AI と辺 BC の交点 D は辺 BC の中点であり，AD$\perp$BC が成り立つ。



よって　　$\mathrm{BD}=\dfrac{12}{2}=6$

$\triangle$ABD において，三平方の定理により

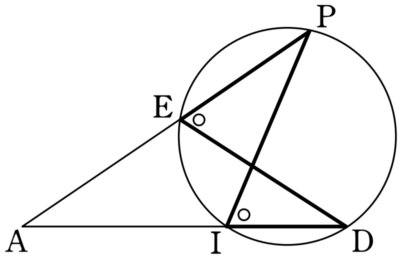
$$\mathrm{AD}=\sqrt{10^2-6^2}=8$$

ここで，I は $\triangle$ABC の内心であるから，直線 BI は $\angle$ABC を 2 等分する。（ア ②）

よって，AI：ID＝BA：BD＝10：6＝5：3 が成り立つ。

したがって　　$\mathrm{AI}=\dfrac{5}{5+3}\times 8=$ イ5，$\mathrm{ID}=\dfrac{3}{5+3}\times 8=$ ウ3

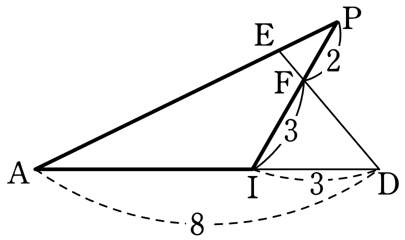
また，点 E は $\angle$PED＝$\angle$PID を満たし，点 E，I は直線 PD に関して同じ側にあるから，円周角の定理の逆により，4 点 E，I，D，P は同一円周上にある。（エ ④）



よって，方べきの定理により

$$\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AP}=\mathrm{AI}\cdot\mathrm{AD}=5\cdot 8=\text{オカ}40$$

(2)　(i)　$\triangle$AIP と直線 DE にメネラウスの定理を



用いると　　$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DI}}\cdot\dfrac{\mathrm{IF}}{\mathrm{FP}}\cdot\dfrac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EA}}=1$

すなわち　　$\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EA}}=1$

よって　　$\dfrac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EA}}=\dfrac{1}{4}$

したがって　PE：EA＝キ1：ク4

PE：EA＝1：4 より　　$\mathrm{AE}=\dfrac{4}{5}\mathrm{AP}$

AE・AP＝40 に代入して　　$\dfrac{4}{5}\mathrm{AP}^2=40$　　　すなわち　　$\mathrm{AP}^2=50$

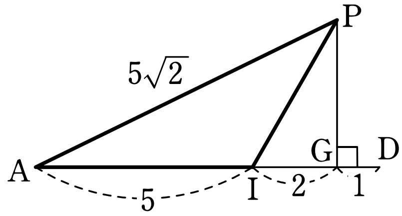
AP＞0 より　　AP＝ケ$5\sqrt{\text{コ}2}$

線分 ID は辺 BC の垂直二等分線であり，G は $\triangle$IBC の重心であるから，G は線分 ID 上にあり，IG：GD＝2：1 が成り立つ。

ID＝3 であるから　　$\mathrm{IG}=\dfrac{2}{2+1}\cdot 3=2$

よって　　AG＝AI＋IG＝5＋2＝7

直線 PG は $\triangle$ABC を含む平面に垂直であるから，AD$\perp$GP が成り立つ。



したがって，$\triangle$AGP において三平方の定理により　　$\mathrm{PG}=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-7^2}=1$

また，△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{BC}\cdot \mathrm{AD}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8=48$$

以上より，求める体積 V_1 は

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot S\cdot \mathrm{PG}=\frac{1}{3}\cdot 48\cdot 1={}^{サシ}16$$

(ii) 仮定 2 を満たす点 P を点 P′ とする。

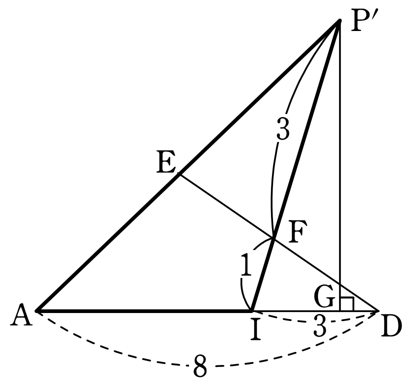
△AIP′ と直線 DE にメネラウスの定理を

用いると　$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DI}}\cdot\dfrac{\mathrm{IF}}{\mathrm{FP'}}\cdot\dfrac{\mathrm{P'E}}{\mathrm{EA}}=1$

すなわち　$\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\mathrm{P'E}}{\mathrm{EA}}=1$

よって　$\dfrac{\mathrm{P'E}}{\mathrm{EA}}=\dfrac{9}{8}$

したがって　P′E：EA＝9：8



P′E：EA＝9：8 より　$\mathrm{AE}=\dfrac{8}{17}\mathrm{AP'}$

AE・AP′＝40 に代入して　$\dfrac{8}{17}\mathrm{AP'}^2=40$　すなわち　$\mathrm{AP'}^2=85$

AP′＞0 より　$\mathrm{AP'}=\sqrt{85}$

△AGP′ において三平方の定理により

$$\mathrm{P'G}=\sqrt{(\sqrt{85})^2-7^2}=6$$

したがって，V_2 と V_1 の比は

$$V_2 : V_1=\frac{1}{3}\cdot S\cdot \mathrm{P'G} : \frac{1}{3}\cdot S\cdot \mathrm{PG}=\mathrm{P'G} : \mathrm{PG}={}^{ス}6 : {}^{セ}1$$

であるから，V_2 は V_1 より大きい。(^{ソ} ②)