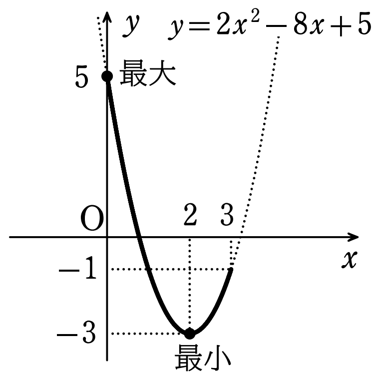
数学Ⅰ，A 第２問〔1〕

(1)　$y=2x^2-8x+5=2(x-2)^2-3$

よって，2 次関数 $y=2x^2-8x+5$ は $0 \leqq x \leqq 3$ において，$x=$ ア0 で最大値 イ5 をとり，$x=$ ウ2 で最小値 エオ-3 をとる。



(2)　(i)　$y=f(x)$ は $-3 \leqq x \leqq 0$ において $x=-1$ で最大値 3 をとるから，$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，頂点の座標は $(-1,\ 3)$ である。　(カ ③)

よって，求める 2 次関数は $f(x)=p(x+1)^2+3$ $(p<0)$ と表される。

このとき，$y=f(x)$ は $-3 \leqq x \leqq 0$ において $x=-3$ で最小となるから

$$f(-3)=-5$$

ゆえに　　$-5=p(-3+1)^2+3$

よって　　$-5=4p+3$　　　　ゆえに　　$p=-2$

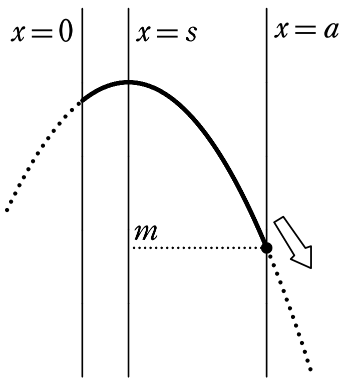
これは，$p<0$ を満たす。

よって　　$f(x)=-2(x+1)^2+3=$ キク$-2x^2-$ ケ$4x+$ コ1

(ii)　$y=g(x)$ のグラフが上に凸の放物線であるとする。

$g(x)$ が $x=a$ で最小となるとき，図のように a を大きくしていくと，$g(x)$ のとりうる値はいくらでも小さくなり，最小値 m はいくらでも小さくなる。

これは条件 2 の「$a \geqq 3$ ならば，$m=-2$ である」を満たさない。

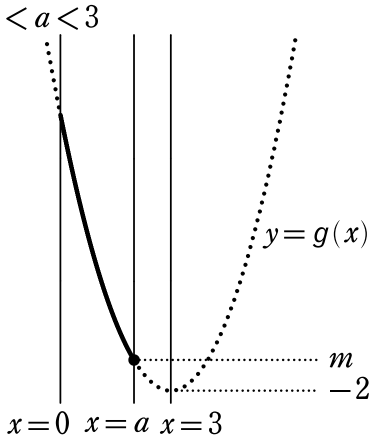


よって，$y=g(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。

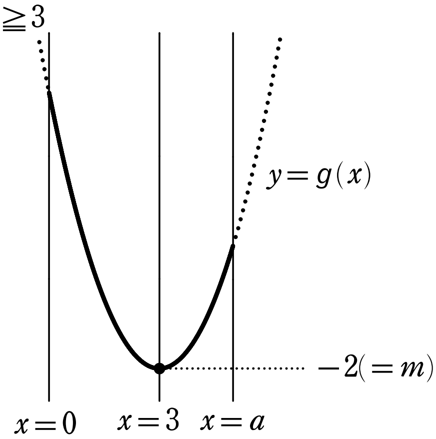
このとき，条件 2 の「$0<a<3$ ならば，$m>-2$ である。」，「$a \geqq 3$ ならば，$m=-2$ である。」から，

$y=g(x)$ のグラフの頂点は　　$(3,\ -2)$

$0<a<3$

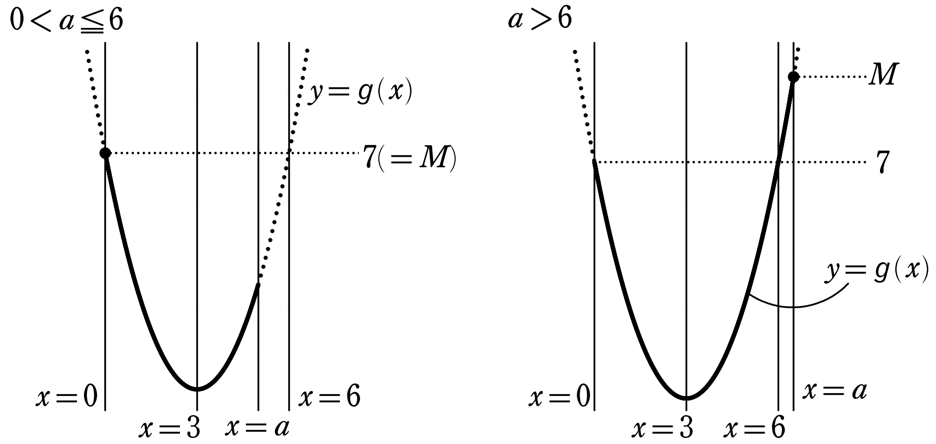


$a \geqq 3$



ゆえに，$g(x)=q(x-3)^2-2$ $(q>0)$ …… ① と表される。

さらに，条件 2 の「$0<a \leqq 6$ ならば，$M=7$ である。」，「$a>6$ ならば，$M>7$ である。」から　　$g(0)=7$　……②



よって，① で $x=0$ とすると，② から　　$7=q(0-3)^2-2$

ゆえに　　$9=9q$　　　　よって　　$q=1$

これは，$q>0$ を満たす。

ゆえに　　$g(x)=(x-3)^2-2=x^2-6x+7$

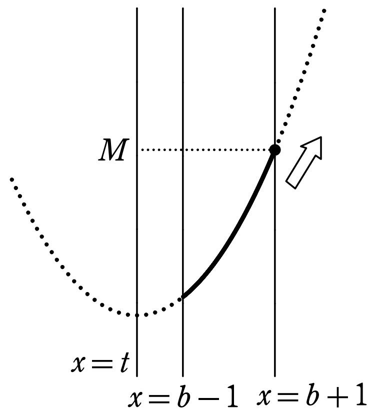
これは条件 2 を満たす。

したがって，2 次関数 $y=g(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり，

$g(x)=x^2-6x+7$ である。　（サ ⓪，シ ⑥）

(3)　$y=h(x)$ のグラフが下に凸の放物線であるとする。

$h(x)$ が $x=b+1$ で最大となるとき，図のように b を大きくしていくと，$h(x)$ のとりうる値はいくらでも大きくなり，最大値 M はいくらでも大きくなる。



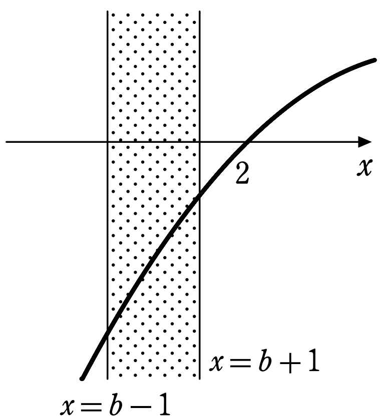
これは条件 3 の「$b<1$ または $7<b$ ならば，$M<0$ である。」を満たさない。

よって，$y=h(x)$ のグラフは上に凸の放物線である。

ここで，条件 3 より

$b=1$ のとき　$M \geqq 0$，$b<1$ のとき　$M<0$

$b<1$ のとき，$b-1 \leqq x \leqq b+1$ において $h(x)<0$ であり，$b=1$ のとき，$b-1 \leqq x \leqq b+1$ すなわち $0 \leqq x \leqq 2$ において $M \geqq 0$ であることに注意すると，$y=h(x)$ のグラフは右の図のようになり，$b=1$ のとき，$h(x)$ は $x=2$ で最大値 M をとる。



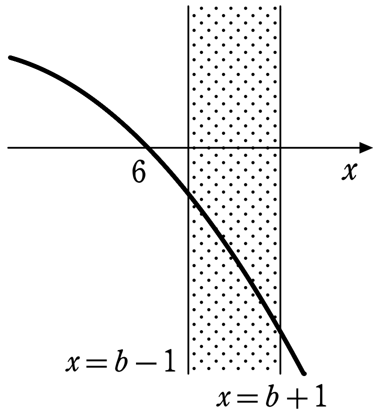
$b=1$ のとき，$M \geqq 0$ であることと，$0 \leqq x<2$ において $h(x)<0$ であることから　　$M=0$

よって　　$h(2)=0$

また，条件 3 より

$b=7$ のとき　$M \geqq 0$，$7<b$ のとき　$M<0$

$h(2)=0$ を示したときと同様に考えると，$y=h(x)$ のグラフは右の図のようになり　　$h(6)=0$



よって，$h(x)=r(x-2)(x-6)$ $(r<0)$ と表され，これは条件 3 を満たす。

したがって，$y=h(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は

[ス]2，[セ]6 (または [ス]6，[セ]2)