数学Ⅰ，A 第１問〔2〕

(1)　△ABD と △BCD の面積 S_1，S_2 は

$$S_1=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}{2}\sin A,\ S_2=\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}{2}\sin C\quad(^{ク}①,\ ^{ケ}④)$$

四角形の 4 つの内角の和は 360° であるから　　$A+B+C+D=360°$

よって，$A+C=B+D$ を満たすとき　　$2(A+C)=360°$

ゆえに　　$A+C=180°$　$(^{コ}④)$

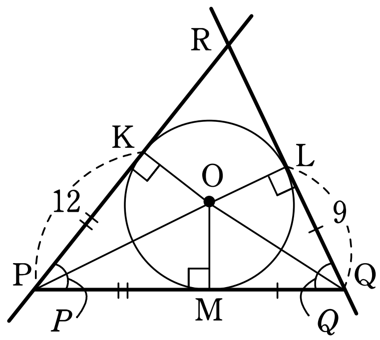
このとき，$C=180°-A$ から　　$\sin C=\sin(180°-A)=\sin A$

よって　　$$S=S_1+S_2=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}{2}\sin A+\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}{2}\sin C$$

$$=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}{2}\sin A+\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}{2}\sin A$$

$$=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}{2}\sin A\quad(^{サ}②)\quad\cdots\cdots①$$

(2)　(i)　PK＝12，QL＝9 であるとき，△PQR は右の図のようになる。



四角形 PMOK について考える。

円の接線の性質から　　PM＝PK＝12

また　　OM＝OK＝6，PM⊥OM，PK⊥OK

ゆえに，四角形 PMOKの面積は

△PMO＋△PKO

$$=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PM}\cdot\mathrm{OM}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PK}\cdot\mathrm{OK}$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot12\cdot6=^{シス}72$$

ここで，∠PMO＋∠PKO＝90°＋90°＝180° より　　∠KPM＋∠KOM＝180°

よって，① を用いると

$$72=\frac{\mathrm{PM}\cdot\mathrm{PK}+\mathrm{MO}\cdot\mathrm{OK}}{2}\sin P$$

ゆえに　　$72=\dfrac{12\cdot12+6\cdot6}{2}\sin P$　　　よって　　$\sin P=\dfrac{^{セ}4}{^{ソ}5}$

四角形 QMOL についても同様に

QM＝QL＝9，OM＝OL＝6，QM⊥OM，QL⊥OL

ゆえに，四角形 QMOL の面積は

$$\triangle\mathrm{QMO}+\triangle\mathrm{QLO}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{QM}\cdot\mathrm{OM}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{QL}\cdot\mathrm{OL}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot9\cdot6=54$$

ここで，∠LQM＋∠LOM＝180° より，① を用いると

$$54=\frac{\mathrm{QM}\cdot\mathrm{QL}+\mathrm{MO}\cdot\mathrm{OL}}{2}\sin Q$$

ゆえに　　$54=\dfrac{9\cdot9+6\cdot6}{2}\sin Q$　　　よって　　$\sin Q=\dfrac{^{タチ}12}{^{ツテ}13}$

また，△PQR において，正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{PR}}{\sin Q}=\dfrac{\mathrm{QR}}{\sin P}$

よって　$\mathrm{PR}:\mathrm{QR}=\sin Q:\sin P=\dfrac{12}{13}:\dfrac{4}{5}={}^{\text{トナ}}15:{}^{\text{ニヌ}}13$

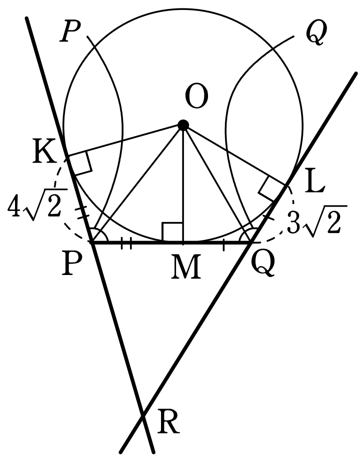
$\mathrm{RL}=x$ とすると　$\mathrm{RK}=\mathrm{RL}=x$

$\mathrm{PR}=x+12$，$\mathrm{QR}=x+9$ であるから　$(x+12):(x+9)=15:13$

よって　$13(x+12)=15(x+9)$　　整理して　$2x=21$

ゆえに　$x=\dfrac{{}^{\text{ネノ}}21}{{}^{\text{ハ}}2}$

(ii)　$\mathrm{PK}=4\sqrt{2}$，$\mathrm{QL}=3\sqrt{2}$ であるとき，△PQR は右の図のようになる。



$\angle\mathrm{KPM}=P$，$\angle\mathrm{LQM}=Q$ とし，(i) と同様に考える。

$\mathrm{PM}=\mathrm{PK}=4\sqrt{2}$，$\mathrm{OM}=\mathrm{OK}=6$，$\mathrm{PM}\perp\mathrm{OM}$，$\mathrm{PK}\perp\mathrm{OK}$ であるから，四角形 PMOK の面積は

$$\triangle\mathrm{PMO}+\triangle\mathrm{PKO}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot6=24\sqrt{2}$$

よって，① を用いると

$$24\sqrt{2}=\frac{\mathrm{PM}\cdot\mathrm{PK}+\mathrm{MO}\cdot\mathrm{OK}}{2}\sin P$$

ゆえに　$\sin P=\dfrac{12\sqrt{2}}{17}$

また，$\mathrm{QM}=\mathrm{QL}=3\sqrt{2}$，$\mathrm{OM}=\mathrm{OL}=6$，$\mathrm{QM}\perp\mathrm{OM}$，$\mathrm{QL}\perp\mathrm{OL}$ であるから，四角形 QMOL の面積は

$$\triangle\mathrm{QMO}+\triangle\mathrm{QLO}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot6=18\sqrt{2}$$

よって，① を用いると

$$18\sqrt{2}=\frac{\mathrm{QM}\cdot\mathrm{QL}+\mathrm{MO}\cdot\mathrm{OL}}{2}\sin Q$$

ゆえに　$\sin Q=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

また，△PQR において，正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{PR}}{\sin(180^\circ-Q)}=\dfrac{\mathrm{QR}}{\sin(180^\circ-P)}$

ゆえに　$\mathrm{PR}:\mathrm{QR}=\sin(180^\circ-Q):\sin(180^\circ-P)=\sin Q:\sin P$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}:\frac{12\sqrt{2}}{17}=17:18$$

$\mathrm{RL}=y$ とすると　$\mathrm{RK}=\mathrm{RL}=y$

$\mathrm{PR}=y-4\sqrt{2}$，$\mathrm{QR}=y-3\sqrt{2}$ であるから　$(y-4\sqrt{2}):(y-3\sqrt{2})=17:18$

よって　$18(y-4\sqrt{2})=17(y-3\sqrt{2})$

ゆえに　$y={}^{\text{ヒフ}}21\sqrt{{}^{\text{ヘ}}2}$