

数学Ⅱ, B, C 第 1 問

- (1) (i) $\alpha = \beta$ のとき, $\alpha = \theta + \frac{\pi}{6}$, $\beta = 2\theta$ より

$$\theta + \frac{\pi}{6} = 2\theta \quad \text{よって} \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{また, } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき} \quad \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- (ii) $\sin \alpha$ は点 P の y 座標, $\sin \beta$ は点 Q の y 座標であるから, $\sin \alpha = \sin \beta$ が成り立つとき, つねに点 P の y 座標と点 Q の y 座標が等しい。(②)
 (iii) (ii) と同様の点 P と点 Q について考える。

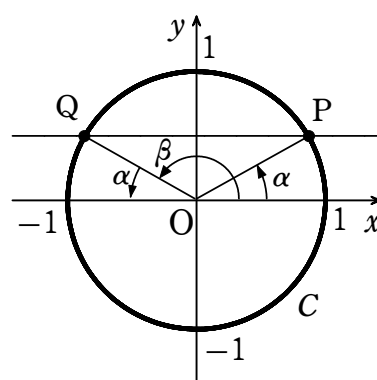
[1] $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{2}{3}\pi \quad \text{かつ} \quad 0 \leq \beta \leq \pi \quad \text{かつ} \quad \theta \neq \frac{\pi}{6} \quad \text{である}$$

ことから, ② が成り立つ, すなわち点 P の y 座標と点 Q の y 座標が等しくなるのは, 右の図のように, $\alpha + \beta = \pi$ が成り立つときである。(②)

$$\text{これより} \quad \left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 2\theta = \pi$$

$$\text{よって, } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のときの ① の解は} \quad \theta = \frac{5}{18}\pi$$



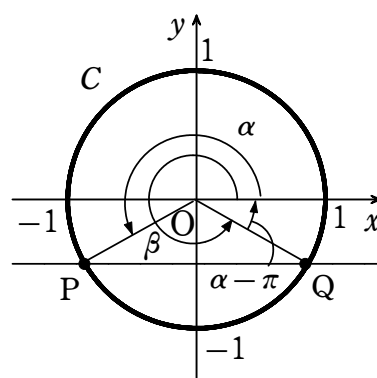
[2] $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき

$$\frac{2}{3}\pi < \alpha < \frac{7}{6}\pi \quad \text{かつ} \quad \pi < \beta < 2\pi \quad \text{かつ} \quad \theta \neq \frac{\pi}{6} \quad \text{である}$$

ことから, ② が成り立つ, すなわち点 P の y 座標と点 Q の y 座標が等しくなるのは, 右の図のように, $(\alpha - \pi) + \beta = 2\pi$, すなわち $\alpha + \beta = 3\pi$ が成り立つときである。(⑥)

$$\text{これより} \quad \left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 2\theta = 3\pi$$

$$\text{よって, } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ のときの ① の解は} \quad \theta = \frac{17}{18}\pi$$



- (2) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2\theta$ ③ とおく。(1) の α , β を用いれば, ③ は $\cos \alpha = \cos \beta$ ④ と表せる。

$$\text{ここで, } \alpha = \beta \text{ を満たす } \theta \text{ は } \theta + \frac{\pi}{6} = 2\theta \text{ から} \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ を除く ③ の解について考える。(1) の (ii) と同様に考えれば, ④ が成り立つ

とき、つねに点 P の x 座標と点 Q の x 座標は等しい。したがって、 $\theta \neq \frac{\pi}{6}$ として、
点 P の x 座標と点 Q の x 座標が等しくなるような θ の値を考えればよい。

[1] $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

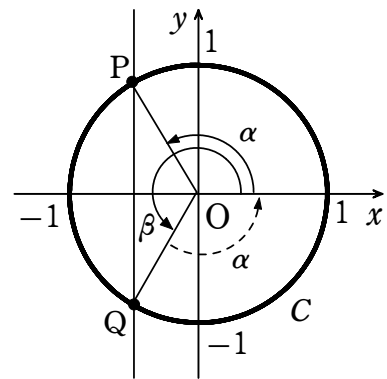
$\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{2}{3}\pi$ かつ $0 \leq \beta \leq \pi$ かつ $\theta \neq \frac{\pi}{6}$ であるから、点 P および点 Q は第 1 象限
または第 2 象限にあり、この範囲で点 P の x 座標と点 Q の x 座標が等しくなることは
ない。

[2] $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき

$\frac{2}{3}\pi < \alpha < \frac{7}{6}\pi$ かつ $\pi < \beta < 2\pi$ かつ $\theta \neq \frac{\pi}{6}$ である
ことから、④ が成り立つ、すなわち点 P の x 座標
と点 Q の x 座標が等しくなるのは、右の図の
ように、 α が第 2 象限の角、 β が第 3 象限の角の
ときで、 $\alpha + \beta = 2\pi$ が成り立つときである。

$$\text{これより } \left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 2\theta = 2\pi$$

$$\text{よって、} \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ のときの ③ の解は } \theta = \frac{11}{18}\pi$$



[1], [2] を含む以上の考察から、 $0 \leq \theta < \pi$ のとき、③ の解は $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\frac{11}{18}\pi$

【参考】 三角関数の和と積の公式により、③ は以下のように解くこともできる。

$$\cos 2\theta - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$-2\sin\left(\frac{3}{2}\theta + \frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{\pi}{12}\right) = 0$$

$0 \leq \theta < \pi$ より、 $\frac{\pi}{12} \leq \frac{3}{2}\theta + \frac{\pi}{12} < \frac{19}{12}\pi$, $-\frac{\pi}{12} \leq \frac{1}{2}\theta - \frac{\pi}{12} < \frac{5}{12}\pi$ であるから

$$\frac{3}{2}\theta + \frac{\pi}{12} = \pi \text{ または } \frac{1}{2}\theta - \frac{\pi}{12} = 0$$

$$\text{よって } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{11}{18}\pi$$

数学Ⅱ, B, C 第2問

- (1) r は1日ごとの水草 A の量の増加する倍率であるから、水草 A の量は、1日目の正午には0日目の正午の r 倍、2日目の正午には r^2 倍、3日目の正午には r^3 倍となる。観測結果から、3日目の正午の水草 A の量は0日目の正午の 1.32 倍であるから、

r は $r^3 = 1.32$ を満たす。(ア ③)

この式の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} r^3 = \log_{10} 1.32$$

常用対数表より、 $\log_{10} 1.32 = 0.1206$ (イ ①) であるから

$$3\log_{10} r = 0.1206$$

よって $\log_{10} r = 0.ウエオカ0402$

- (2) 水草 A の量は、14日目の正午には、0日目の正午の量の r^{14} 倍、すなわち

a の r^{14} 倍となる。(キ ③)

いま、0日目の正午に a % だった水草 A の量が、14日目の正午に 60 % となることから $a \times r^{14} = \text{クケ} 60$ ①

①の両辺の常用対数を取り、(1)で求めた $\log_{10} r = 0.0402$ と $\log_{10} 6 = 0.7782$ であることを用いると、

$$\log_{10}(a \times r^{14}) = \log_{10} 60$$

$$\log_{10} a + 14\log_{10} r = \log_{10} 6 + \log_{10} 10$$

$$\log_{10} a = \log_{10} 6 + 1 - 14\log_{10} r$$

$$\log_{10} a = 0.7782 + 1 - 14 \times 0.0402$$

$$\log_{10} a = 1.2154 \quad (\text{ク} ③)$$

また、 $\log_{10} a = 0.2154 + 1$ であって、常用対数表より、 $\log_{10} 1.64 = 0.2148$,

$\log_{10} 1.65 = 0.2175$ であるから

$$\log_{10} 1.64 + 1 < \log_{10} a < \log_{10} 1.65 + 1$$

$$\log_{10} 16.4 < \log_{10} a < \log_{10} 16.5$$

底 10 は 1 より大きいから $16.4 < a < 16.5$

したがって、 a 以下の最大の整数は サシ 16

数学Ⅱ, B, C 第3問

(1) $F(x) = 2x^3 + 3x^2$ のとき

$$f(x) = F'(x) = {}^{\text{ア}}6x^2 + {}^{\text{イ}}6x = 6x(x+1)$$

$F'(x) = 0$ とすると $x = 0, -1$

$F(x)$ の増減表は右のようになる。

よって, $F(x)$ は $x = {}^{\text{ウエ}}-1$ で極大値をとる。

また, $G'(x) = f(x)$ であるから

$$\begin{aligned} G(x) &= \int f(x) dx = \int (6x^2 + 6x) dx \\ &= {}^{\text{オ}}2x^3 + {}^{\text{カ}}3x^2 + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と表される。

$G'(x) = F'(x) = 6x(x+1)$ であるから, $G(x)$ の増減表は, $F(x)$ と同じく右のようになる。

よって, $G(x)$ は $x = {}^{\text{キ}}0$ で極小値をとる。

さらに, 条件より, $G(x)$ は $x = k$ で極大値 0

をとるから, $k = -1$ であり $G(-1) = 0$

これと ① から $2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + C = 0$

ゆえに $C = {}^{\text{クケ}}-1$

(2) (i) $F(x)$ が $x = 0$ で極小値をとることと, $F'(x) = f(x)$ から,

$$F'(0) = f(0) = {}^{\text{コ}}0$$

であり, $x = 0$ の前後で $F'(x)$ すなわち $f(x)$ の符号は負から正に変わる。 (${}^{\text{サ}}\textcircled{2}$)

$G(x)$ が $x = k$ で極大値をとることと, $G'(x) = f(x)$ から,

$$G'(k) = f(k) = {}^{\text{シ}}0$$

であり, $x = k$ の前後で $G'(x)$ すなわち $f(x)$ の符号は正から負に変わる。 (${}^{\text{ス}}\textcircled{1}$)

さらに, $f(x)$ は 2 次関数であり, $k > 0$ である

から, $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

$F'(x)$ すなわち $f(x)$ の符号の変化に注意して,

$F(x)$ の増減表をかくと, 次のようになる。

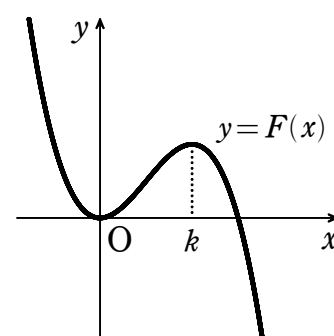
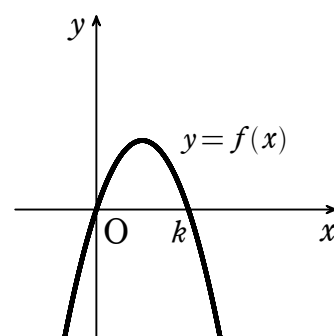
x	...	0	...	k	...
$F'(x)$	-	0	+	0	-
$F(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

条件より, $F(0) = 0$ であるから, $y = F(x)$ のグラフ

の概形は右の図のようになる。 (${}^{\text{セ}}\textcircled{3}$)

x	...	-1	...	0	...
$F'(x)$	+	0	-	0	+
$F(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

x	...	-1	...	0	...
$G'(x)$	+	0	-	0	+
$G(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$



(ii) $F(0)=0$, $F'(x)=f(x)$ であるから, すべての実数 x に対して

$$F(x) = F(x) - F(0) = \int_0^x F'(t) dt = \int_0^x f(t) dt \quad (\text{ヨ ③}, \text{タ ④})$$

これと (i) の考察により, $F(x)$ の極大値は $F(k) = \int_0^k f(t) dt$ (チ ②, ツ ④)

ここで, 定積分 $\int_0^k f(t) dt$ は, 右の図の斜線部分の

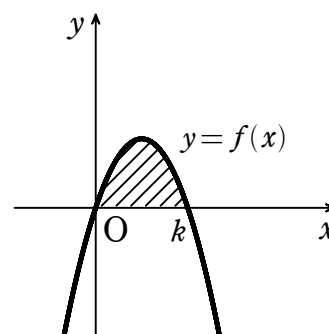
面積と等しい。

よって, $F(x)$ の極大値は, 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積と等しいことがわかる。

(テ ④, ト ④)

また, $G'(x)=F'(x)$ であるから, $G(x)$ の増減表は, $F(x)$ と同じく次のようになる。

x	...	0	...	k	...
$G'(x)$	—	0	+	0	—
$G(x)$		↘	極小	↗	極大



さらに, 条件より, $G(k)=0$ であるから, すべての実数 x に対して

$$G(x) = G(x) - G(k) = \int_k^x G'(t) dt = \int_k^x f(t) dt$$

よって, $F(x)$ の極大値は $F(k) = \int_0^k f(t) dt = -\int_k^0 f(t) dt = -G(0)$

$G(0)$ は $G(x)$ の極小値であるから, $F(x)$ の極大値は, $G(x)$ の極小値の -1 倍と等しい。 (ナ ②)

別解 $F'(x)=G'(x)=f(x)$ であるから, $F(x)$ と $G(x)$ はともに $f(x)$ の原始関数で,

$$G(x) = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

と表される。

このとき, $G(k)=F(k)+C$ であり, $G(k)=0$ である

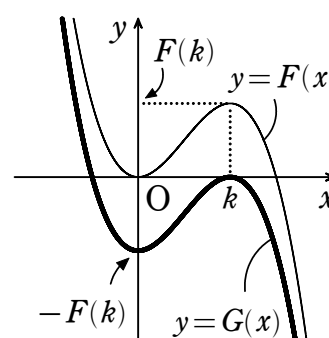
から $C = -F(k)$

よって $G(x) = F(x) - F(k)$

ゆえに, $y=G(x)$ のグラフは, $y=F(x)$ のグラフを y 軸方向に $-F(k)$ だけ平行移動したものであり, 右の図の太線部分のようになる。

したがって, $G(x)$ の極小値は $-F(k)$ であるから,

$F(x)$ の極大値は, $G(x)$ の極小値の -1 倍と等しい。 (ナ ②)



数学Ⅱ, B, C 第4問

- (1) 直線 $x=2$ 上の格子点で T の内部にあるものは
点 $(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5)$ の5個ある。

よって $a_2 = {}^15$

直線 $x=3$ 上の格子点で T の内部にあるものは
点 $(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$
 $(3, 7), (3, 8)$ の8個ある。

よって $a_3 = {}^18$

直線 $x=n$ 上の格子点で T の内部にあるものの個数は、 n が1だけ大きくなると、3個ずつ増えていくから、数列 $\{a_n\}$ は公差が 3 の等差数列である。

(ウ ①, オ ①)

$1 \leq n \leq 20$ より、 T の内部にある格子点の個数は、
初項 $a_1 = 2$ 、公差 3、項数 20 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 20 \{ 2 \cdot 2 + (20-1) \cdot 3 \} = \text{カキク} 610$$

別解 直線 $x=n$ 上の格子点で T の内部にあるものは

点 $(n, 1), (n, 2), \dots, (n, 3n-1)$ の $(3n-1)$ 個ある。

よって $a_n = 3n-1$

ゆえに、数列 $\{a_n\}$ は初項 2、公差 3 の等差数列である。(ウ ①, オ ①)

したがって、 T の内部にある格子点の個数は

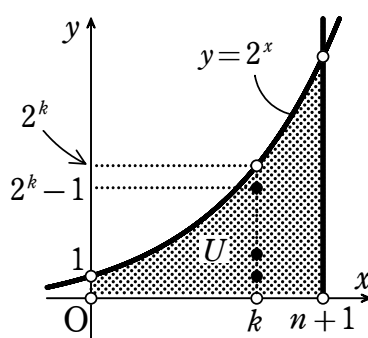
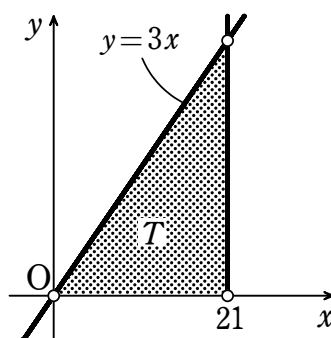
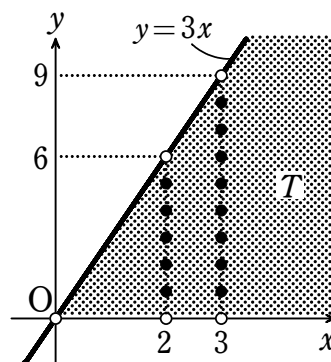
$$\sum_{n=1}^{20} (3n-1) = \frac{3}{2} \cdot 20 \cdot (20+1) - 20 = \text{カキク} 610$$

- (2) 関数 $y=2^x$ のグラフと x 軸、 y 軸および直線 $x=n+1$ で囲まれた図形 U は右の図のようになる。

直線 $x=k$ 上の格子点で U の内部にあるものは
点 $(k, 1), (k, 2), \dots, (k, 2^k-1)$ の (2^k-1) 個
ある。(ケ ⑦)

したがって、 U の内部にある格子点の個数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2^k-1) &= \frac{2(2^n-1)}{2-1} - n \\ &= 2^{n+1} - n - 2 \quad (\text{コ ①}, \text{サ ⑦}) \end{aligned}$$

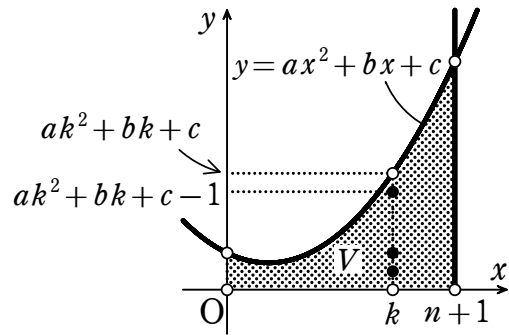


(3) $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$ であるとき、放物線

$y = ax^2 + bx + c$ は下に凸で、 x 軸との共有点をもたない。

よって、放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と x 軸、 y 軸および直線 $x = n + 1$ で囲まれた図形 V は右の図のようになる。

直線 $x = k$ 上の格子点で V の内部にあるものの個数は $(ak^2 + bk + c - 1)$ 個したがって、 V の内部にある格子点の個数が n^3 となるとき



$$\sum_{k=1}^n (ak^2 + bk + c - 1) = n^3$$

すなわち $\frac{a}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{b}{2}n(n+1) + (c-1)n = n^3$

左辺を n について整理すると

$$\frac{1}{3}an^3 + \frac{1}{2}(a+b)n^2 + \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c - 1\right)n = n^3$$

これがすべての自然数 n に対して成り立つから

$$\frac{1}{3}a = 1, \quad \frac{1}{2}(a+b) = 0, \quad \frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c - 1 = 0$$

これを解いて $a = 3$, $b = -3$, $c = 2$

(これらは、 a , b , c が整数で、 $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$ の条件を満たす。)

数学Ⅱ, B, C 第 5 問

- (1) レモンの重さ X は平均 110 g, 標準偏差 20 g の正規分布 $N(110, 20^2)$ に従うから,

$$Z = \frac{X - 110}{20} \text{ とおくと, } Z \text{ は標準正規分布 } N(0, 1) \text{ に従う。}$$

よって, 無作為抽出した 1 個のレモンが L サイズである確率は, 正規分布表から

$$\begin{aligned} P(110 \leq X < 140) &= P(110 \leq X \leq 140) \\ &= P\left(\frac{110 - 110}{20} \leq \frac{X - 110}{20} \leq \frac{140 - 110}{20}\right) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332 \end{aligned}$$

Q 地域で収穫されるレモン 1 個を無作為に抽出するとき, それが L サイズである確率は 0.4332 であるから, レモンが 200000 個収穫されるとすると, その中の L サイズのレモンの個数 Y は二項分布 $B(200000, 0.4332)$ に従う。

よって, Y の平均 (期待値) は $200000 \cdot 0.4332 = 86640$ (オ ④)

- (2) Q 地域で今年収穫されるレモン全体を母集団とし, その重さの母平均が m g, 母標準偏差が σ g であるから, n が十分に大きいとき, 標本平均 $\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。(カ ⑥)

また, m に対する信頼度 95 % の信頼区間は $\overline{W} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{W} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ で

$$\text{あるから } B - A = \left(\overline{W} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\overline{W} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \frac{3.92\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{キ ⑤})$$

したがって, $\sigma = 20$ として, $B - A \leq 4$ すなわち, $\frac{3.92\sigma}{\sqrt{n}} \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$ を満たす自然数 n を求める。

① の両辺は正であるから, 両辺を 2 乗して整理すると $(3.92\sigma)^2 \leq 16n$

$$\sigma = 20 \text{ を代入して } 3.92^2 \times 20^2 \leq 16n$$

$$3.92^2 \times 5^2 \leq n$$

$$19.6^2 \leq n$$

$$384.16 \leq n$$

よって, ① を満たす最小の自然数 n_0 は $n_0 = \text{クケコ} 385$

- (3) $m \leq 110$ を前提として考える。

対立仮説は検証したい仮説であるから, 「Q 地域で今年収穫されるレモンの重さの母平均は 110 g より軽い」, すなわち, 「 $m < 110$ 」である。(サ ⑩)

帰無仮説「 $m = 110$ 」が正しいと仮定すると, 標本の大きさ 400 は十分に大きいから,

標本平均 $\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N\left(110, \frac{20^2}{400}\right)$, すなわち $N(110, 1)$ に従う。(シ ⑤)

よって, $Z' = \frac{\overline{W} - 110}{1} = \overline{W} - 110$ とおくと, 確率変数 Z' は近似的に標準正規分布

$N(0, 1)$ に従うから, 正規分布表より

$$\begin{aligned}
 P(\overline{W} \leq 108.2) &= P(\overline{W} - 110 \leq 108.2 - 110) \\
 &= P(Z' \leq -1.8) = P(Z' \geq 1.8) \\
 &= 0.5 - P(0 \leq Z' \leq 1.8) \\
 &= 0.5 - 0.4641 = 0.0359
 \end{aligned}$$

この値をパーセント表示すると 3.59 % であり，有意水準 5 % より小さいから，帰無仮説は棄却される。（チ ①）

したがって，有意水準 5 % で今年収穫されるレモンの重さの母平均は 110 g より軽いと判断できる。（ツ ②）

数学Ⅱ, B, C 第6問

(1) 点 C は O を中心とする半径 1 の球 S 上にあるから $|\overrightarrow{OC}|=1$

よって $|\overrightarrow{OC}|^2=1$

C(x, y, z) であるから $x^2+y^2+z^2=1$ …… ①

$\triangle ABC$ が正三角形であるとするとき, $\triangle OAC$ と $\triangle OAB$ は, OA は共通な辺で,

OC=OB, AC=AB より $\triangle OAC \equiv \triangle OAB$

したがって, 対応する角の大きさも等しいから $\angle AOC = \angle AOB$

また, 点 A, B は球 S 上の点であるから $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$

よって $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OC}| \cos \angle AOC = \cos \angle AOC$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \angle AOB = \cos \angle AOB$

これと $\angle AOC = \angle AOB$ から $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ (イ ④)

さらに, $\overrightarrow{OA}=(1, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB}=(a, \sqrt{1-a^2}, 0)$, $\overrightarrow{OC}=(x, y, z)$ より

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = x$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \cdot a + 0 \cdot \sqrt{1-a^2} + 0 \cdot 0 = a$$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ から $x=a$ …… ② (ウ ⑤)

同様に, $\triangle OBC \equiv \triangle OAB$ であるから $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$

$$a \cdot x + \sqrt{1-a^2} \cdot y + 0 \cdot z = a$$

すなわち $ax + \sqrt{1-a^2}y = a$ …… ③ (エ ⑥, オ ⑦)

逆に, 実数 x, y, z が ①, ②, ③ を満たすとき, 点 C は S 上の点であり, $\triangle ABC$ は正三角形である。 …… (*)

(2) (i) $a=\frac{3}{5}$ のとき, ② から $x=\frac{\text{カ}3}{\text{キ}5}$

③ から $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = \frac{3}{5}$

$x=\frac{3}{5}$ を代入して $y=\frac{\text{ク}3}{\text{ケコ}10}$

このとき, ① から $z^2=1-x^2-y^2=1-\frac{9}{25}-\frac{9}{100}=\frac{55}{100}$

よって, ① を満たす実数 z は $z=\pm\frac{\sqrt{55}}{10}$ のちょうど 2 つある。 (サ ⑧)

したがって, $\triangle ABC$ が正三角形となる S 上の点 C はちょうど 2 つある。

(ii) $a=-\frac{3}{5}$ のとき, ② から $x=-\frac{3}{5}$

③ から $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = -\frac{3}{5}$

$x=-\frac{3}{5}$ を代入して $y=-\frac{6}{5}$

$$\text{このとき, ① から } z^2 = 1 - x^2 - y^2 = 1 - \frac{9}{25} - \frac{36}{25} = -\frac{4}{5}$$

$z^2 \geq 0$ より, これを満たす実数 z は存在しないから, $\triangle ABC$ が正三角形となる S 上の点 C はない。 (シ ⑦)

$$(3) \text{ ② を ③ に代入して } \begin{aligned} a^2 + \sqrt{1-a^2} y &= a \\ \sqrt{1-a^2} y &= a(1-a) \end{aligned}$$

$$-1 < a < 1 \text{ より, } \sqrt{1-a^2} \neq 0 \text{ であるから } y = \frac{a(1-a)}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{このとき, ① から } z^2 &= 1 - x^2 - y^2 = 1 - a^2 - \frac{a^2(1-a)^2}{1-a^2} \\ &= \frac{(1-a^2)^2 - a^2(1-a)^2}{1-a^2} = \frac{(1-a)(1+a)^2 - a^2(1-a)}{1-a^2} \\ &= \frac{\{(1+a)^2 - a^2\}(1-a)}{1+a} = \frac{(1+2a)(1-a)}{1+a} \quad (\text{ス ③}) \end{aligned}$$

$z^2 \geq 0, 1+a > 0$ であるから, $(1+2a)(1-a) \geq 0$ である。

逆に, $(1+2a)(1-a) \geq 0$ のとき, 実数 z が存在するから, ①, ②, ③ を満たす実数 x, y, z があることがわかる。

$$(1+2a)(1-a) \geq 0 \text{ より } -\frac{1}{2} \leq a \leq 1$$

$$-1 < a < 1 \text{ と合わせて } -\frac{1}{2} \leq a < 1$$

以上のことから, $-\frac{1}{2} \leq a < 1$ は $\triangle ABC$ が正三角形となる S 上の点 C があるための必要

十分条件である。 (セ ④)

参考 (1) の (*) の証明)

① が成立するとき, 点 C は球 S 上に存在する。

また, ② が成立するとき, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ から $\cos \angle AOC = \cos \angle AOB$ によって, $\triangle OAC, \triangle OAB$ で余弦定理と, $OA = OB = OC$ から

$$\begin{aligned} AC^2 &= OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cdot \cos \angle AOC \\ &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB \\ &= AB^2 \end{aligned}$$

すなわち, $AC = AB$ が成り立つから, OA は共通, $OB = OC$ と合わせて

$$\triangle OAC \equiv \triangle OAB$$

したがって $AC = AB$

さらに, ③ が成立するとき, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ から, ② のときと同様にして

$$\triangle OBC \equiv \triangle OAB$$

したがって $BC = AB$

ゆえに $AB = BC = AC$

以上より, 実数 x, y, z が ①, ②, ③ を満たすとき, 点 C は S 上の点であり,

$\triangle ABC$ は正三角形である。

数学Ⅱ, B, C 第 7 問

$$(1) \quad \gamma - \alpha = (7 + 10i) - (3 + 2i) = {}^{\text{ア}}4 + {}^{\text{イ}}8i,$$

$$\beta - \alpha = 7 - (3 + 2i) = {}^{\text{ウ}}4 - {}^{\text{エ}}2i,$$

$$\text{よって} \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{4 + 8i}{4 - 2i} = \frac{2 + 4i}{2 - i} = \frac{2(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 \cdot 5i}{2^2 + 1^2} = 2i \quad (\text{オ } \textcircled{3})$$

$$\text{これを極形式で表すと} \quad 2i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{その偏角は} \quad \frac{\pi}{2} \quad (\text{カ } \textcircled{4})$$

$$(2) \quad \text{複素数平面上の異なる 3 点 } A(\alpha), B(\beta), C(\gamma) \text{ について, } w = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ とおくと,}$$

直線 AB と直線 AC が垂直に交わるのは, w の偏角が $\frac{\pi}{2}$ または $\frac{3}{2}\pi$ のときである。

$$\text{このとき, } w \text{ は純虚数であるから} \quad w + \overline{w} = 0 \quad (\text{キ } \textcircled{2}, \text{ク } \textcircled{5})$$

逆に, $w \neq 0$ に注意すると, $w + \overline{w} = 0$ のとき, w は純虚数であるから, 直線 AB と直線 AC が垂直に交わる。

$$(3) \quad (i) \quad \alpha = z, \beta = 2, \gamma = \frac{4}{z} \text{ のとき}$$

$z \neq 0, 2, -2$ より, α, β, γ は異なる複素数であり

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\frac{4}{z} - z}{2 - z} = \frac{(2 + z)(2 - z)}{z(2 - z)} = 1 + \frac{2}{z}$$

よって, (2) より, 直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための必要十分条件は

$$\left(1 + \frac{2}{z}\right) + \overline{\left(1 + \frac{2}{z}\right)} = 0$$

$$\text{すなわち} \quad 2 + \frac{2}{z} + \frac{2}{\overline{z}} = 0$$

$$\text{この両辺に } z\overline{z} \text{ を掛けて整理すると} \quad z\overline{z} + \overline{z} + z = 0$$

$$\text{よって} \quad (z + 1)(\overline{z} + 1) = 1 \quad \text{すなわち} \quad (z + 1)(\overline{z + 1}) = 1$$

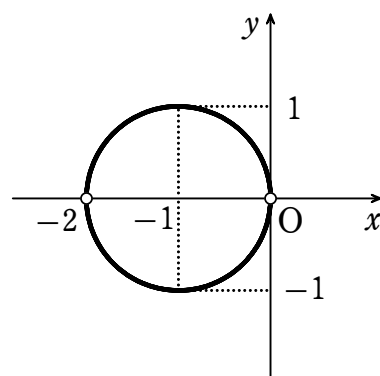
$$\text{ゆえに} \quad |z + 1|^2 = 1$$

$$|z + 1| \geq 0 \text{ であるから} \quad |z + 1| = 1 \quad (\text{ケ } \textcircled{6})$$

ただし, $z \neq 0, 2, -2$ である。

したがって, 直線 AB と直線 AC が垂直に交わる

ような点 z 全体を複素数平面上に図示すると $\text{コ } \textcircled{7}$



(ii) $\alpha' = -z, \beta' = -2, \gamma' = -\frac{4}{z}$ のとき

$z \neq 0, 2, -2$ より, α', β', γ' は異なる複素数であり

$$\frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'} = \frac{-\frac{4}{z} - (-z)}{-2 - (-z)} = \frac{(z+2)(z-2)}{z(z-2)} = 1 + \frac{2}{z}$$

よって, 複素数平面上の異なる 3 点 $A'(\alpha'), B'(\beta'), C'(\gamma')$ について, 直線 $A'B'$ と直線 $A'C'$ が垂直に交わるための必要十分条件は

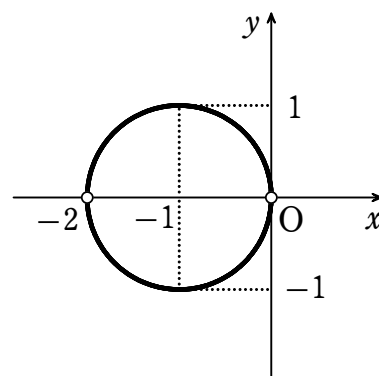
$$\left(1 + \frac{2}{z}\right) + \overline{\left(1 + \frac{2}{z}\right)} = 0$$

(i) と同様に变形すると $|z+1|=1$

ただし, $z \neq 0, 2, -2$ である。

したがって, 直線 $A'B'$ と直線 $A'C'$ が垂直になる

ような点 z 全体を複素数平面上に図示すると サ ⑩



別解 $\alpha' = -\alpha, \beta' = -\beta, \gamma' = -\gamma$ であるから, 3 点 $A'(\alpha'), B'(\beta'), C'(\gamma')$ はそれぞれ点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ を原点に関して対称移動した点である。

よって, 直線 $A'B'$ と直線 $A'C'$ が垂直に交わることは, 直線 AB と直線 AC が垂直に交わることは同値である。

したがって, 直線 $A'B'$ と直線 $A'C'$ が垂直に交わるような点 z 全体は, 直線 AB と直線 AC が垂直に交わるような点 z 全体と一致するから, (i) より $|z+1|=1$ であり, $z \neq 0, 2, -2$ である。(以下, 本解と同じ)

(iii) $\alpha'' = -z, \beta'' = 2, \gamma'' = -\frac{4}{z}$ のとき

$z \neq 0, 2, -2$ より, $\alpha'', \beta'', \gamma''$ は異なる複素数であり

$$\frac{\gamma'' - \alpha''}{\beta'' - \alpha''} = \frac{-\frac{4}{z} - (-z)}{2 - (-z)} = \frac{(z+2)(z-2)}{z(z+2)} = 1 - \frac{2}{z}$$

よって, 複素数平面上の異なる 3 点 $A''(\alpha''), B''(\beta''), C''(\gamma'')$ について, 直線 $A''B''$ と直線 $A''C''$ が垂直に交わるための必要十分

条件は $\left(1 - \frac{2}{z}\right) + \overline{\left(1 - \frac{2}{z}\right)} = 0$

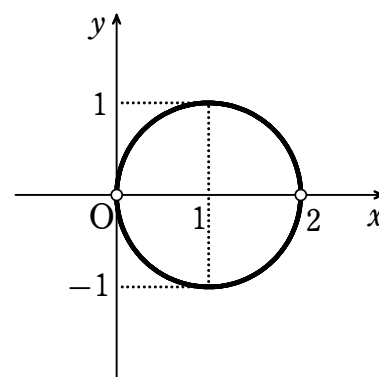
(i) と同様に, 両辺に $z\bar{z}$ を掛けて变形すると,

$$z\bar{z} - \bar{z} - z = 0 \text{ から } |z-1|=1$$

ただし, $z \neq 0, 2, -2$ である。

したがって, 直線 $A''B''$ と直線 $A''C''$ が垂直になる

ような点 z 全体を複素数平面上に図示すると シ ⑪



別解 $\alpha'', \beta'', \gamma''$ は (i) の α, β, γ における z を $-z$ におき換えた複素数であるから, (i) で得られた式 $|z+1|=1$ の z に $-z$ を代入すると $|-z+1|=1$

すなわち $|z-1|=1$

ただし, $-z \neq 0, 2, -2$ から, $z \neq 0, 2, -2$ である。

(以下, 本解と同じ)