

数学Ⅱ, B, C 第 7 問

$$(1) \quad \gamma - \alpha = (7 + 10i) - (3 + 2i) = {}^{\text{ア}}4 + {}^{\text{イ}}8i,$$

$$\beta - \alpha = 7 - (3 + 2i) = {}^{\text{ウ}}4 - {}^{\text{エ}}2i,$$

$$\text{よって} \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{4 + 8i}{4 - 2i} = \frac{2 + 4i}{2 - i} = \frac{2(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 \cdot 5i}{2^2 + 1^2} = 2i \quad (\text{オ } \textcircled{3})$$

$$\text{これを極形式で表すと} \quad 2i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{その偏角は} \quad \frac{\pi}{2} \quad (\text{カ } \textcircled{4})$$

$$(2) \quad \text{複素数平面上の異なる 3 点 } A(\alpha), B(\beta), C(\gamma) \text{ について, } w = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ とおくと,}$$

直線 AB と直線 AC が垂直に交わるのは, w の偏角が $\frac{\pi}{2}$ または $\frac{3}{2}\pi$ のときである。

$$\text{このとき, } w \text{ は純虚数であるから} \quad w + \overline{w} = 0 \quad (\text{キ } \textcircled{2}, \text{ク } \textcircled{5})$$

逆に, $w \neq 0$ に注意すると, $w + \overline{w} = 0$ のとき, w は純虚数であるから, 直線 AB と直線 AC が垂直に交わる。

$$(3) \quad (i) \quad \alpha = z, \beta = 2, \gamma = \frac{4}{z} \text{ のとき}$$

$z \neq 0, 2, -2$ より, α, β, γ は異なる複素数であり

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\frac{4}{z} - z}{2 - z} = \frac{(2 + z)(2 - z)}{z(2 - z)} = 1 + \frac{2}{z}$$

よって, (2) より, 直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための必要十分条件は

$$\left(1 + \frac{2}{z}\right) + \overline{\left(1 + \frac{2}{z}\right)} = 0$$

$$\text{すなわち} \quad 2 + \frac{2}{z} + \frac{2}{\overline{z}} = 0$$

$$\text{この両辺に } z\overline{z} \text{ を掛けて整理すると} \quad z\overline{z} + \overline{z} + z = 0$$

$$\text{よって} \quad (z + 1)(\overline{z} + 1) = 1 \quad \text{すなわち} \quad (z + 1)(\overline{z + 1}) = 1$$

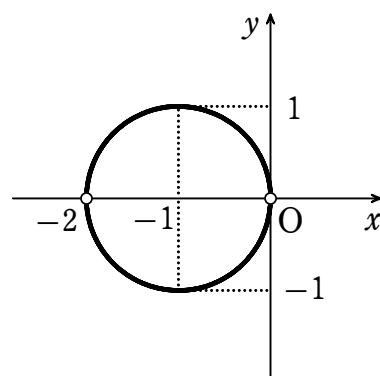
$$\text{ゆえに} \quad |z + 1|^2 = 1$$

$$|z + 1| \geq 0 \text{ であるから} \quad |z + 1| = 1 \quad (\text{ケ } \textcircled{6})$$

ただし, $z \neq 0, 2, -2$ である。

したがって, 直線 AB と直線 AC が垂直に交わる

ような点 z 全体を複素数平面上に図示すると $\text{コ } \textcircled{7}$



(ii) $\alpha' = -z, \beta' = -2, \gamma' = -\frac{4}{z}$ のとき

$z \neq 0, 2, -2$ より, α', β', γ' は異なる複素数であり

$$\frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'} = \frac{-\frac{4}{z} - (-z)}{-2 - (-z)} = \frac{(z+2)(z-2)}{z(z-2)} = 1 + \frac{2}{z}$$

よって, 複素数平面上の異なる 3 点 $A'(\alpha'), B'(\beta'), C'(\gamma')$ について, 直線 $A'B'$ と直線 $A'C'$ が垂直に交わるための必要十分条件は

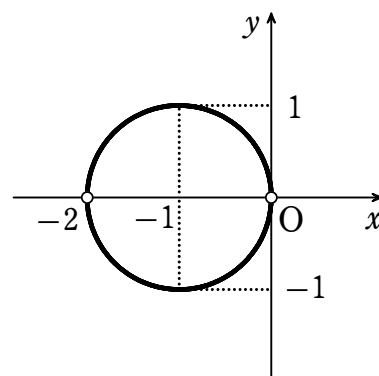
$$\left(1 + \frac{2}{z}\right) + \overline{\left(1 + \frac{2}{z}\right)} = 0$$

(i) と同様に变形すると $|z+1|=1$

ただし, $z \neq 0, 2, -2$ である。

したがって, 直線 $A'B'$ と直線 $A'C'$ が垂直になる

ような点 z 全体を複素数平面上に図示すると サ ⑩



別解 $\alpha' = -\alpha, \beta' = -\beta, \gamma' = -\gamma$ であるから, 3 点 $A'(\alpha'), B'(\beta'), C'(\gamma')$ はそれぞれ点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ を原点に関して対称移動した点である。

よって, 直線 $A'B'$ と直線 $A'C'$ が垂直に交わることは, 直線 AB と直線 AC が垂直に交わることは同値である。

したがって, 直線 $A'B'$ と直線 $A'C'$ が垂直に交わるような点 z 全体は, 直線 AB と直線 AC が垂直に交わるような点 z 全体と一致するから, (i) より $|z+1|=1$ であり, $z \neq 0, 2, -2$ である。(以下, 本解と同じ)

(iii) $\alpha'' = -z, \beta'' = 2, \gamma'' = -\frac{4}{z}$ のとき

$z \neq 0, 2, -2$ より, $\alpha'', \beta'', \gamma''$ は異なる複素数であり

$$\frac{\gamma'' - \alpha''}{\beta'' - \alpha''} = \frac{-\frac{4}{z} - (-z)}{2 - (-z)} = \frac{(z+2)(z-2)}{z(z+2)} = 1 - \frac{2}{z}$$

よって, 複素数平面上の異なる 3 点 $A''(\alpha''), B''(\beta''), C''(\gamma'')$ について, 直線 $A''B''$ と直線 $A''C''$ が垂直に交わるための必要十分

条件は $\left(1 - \frac{2}{z}\right) + \overline{\left(1 - \frac{2}{z}\right)} = 0$

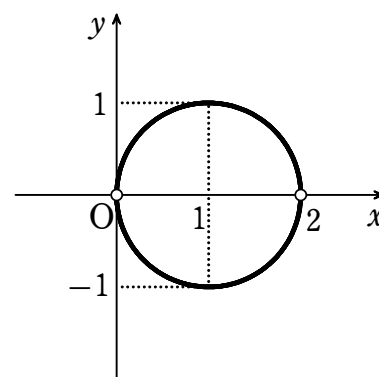
(i) と同様に, 両辺に $z\bar{z}$ を掛けて变形すると,

$$z\bar{z} - \bar{z} - z = 0 \text{ から } |z-1|=1$$

ただし, $z \neq 0, 2, -2$ である。

したがって, 直線 $A''B''$ と直線 $A''C''$ が垂直になる

ような点 z 全体を複素数平面上に図示すると シ ⑪



別解 $\alpha'', \beta'', \gamma''$ は (i) の α, β, γ における z を $-z$ におき換えた複素数であるから, (i) で得られた式 $|z+1|=1$ の z に $-z$ を代入すると $|-z+1|=1$

すなわち $|z-1|=1$

ただし, $-z \neq 0, 2, -2$ から, $z \neq 0, 2, -2$ である。

(以下, 本解と同じ)