数学Ⅱ，B，C　第６問

(1)　点CはOを中心とする半径1の球S上にあるから　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2={}^{ア}1$

C$(x,\ y,\ z)$であるから　$x^2+y^2+z^2=1$　……①

△ABCが正三角形であるとするとき，△OACと△OABは，OAは共通な辺で，

OC＝OB，AC＝ABより　△OAC≡△OAB

したがって，対応する角の大きさも等しいから　∠AOC＝∠AOB

また，点A，Bは球S上の点であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{AOC}=\cos\angle\mathrm{AOC}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB}=\cos\angle\mathrm{AOB}$

これと∠AOC＝∠AOBから　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　（^{イ}④）

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(a,\ \sqrt{1-a^2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(x,\ y,\ z)$より

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=x$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1\cdot a+0\cdot\sqrt{1-a^2}+0\cdot 0=a$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$から　$x=a$　……②　（^{ウ}⓪）

同様に，△OBC≡△OABであるから　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$a\cdot x+\sqrt{1-a^2}\cdot y+0\cdot z=a$

すなわち　$ax+\sqrt{1-a^2}\,y=a$　……③　（^{エ}⓪，^{オ}⑤）

逆に，実数x，y，zが①，②，③を満たすとき，点CはS上の点であり，△ABCは正三角形である。　……(＊)

(2)　(i)　$a=\dfrac{3}{5}$のとき，②から　$x=\dfrac{{}^{カ}3}{{}^{キ}5}$

③から　$\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y=\dfrac{3}{5}$

$x=\dfrac{3}{5}$を代入して　$y=\dfrac{{}^{ク}3}{{}^{ケコ}10}$

このとき，①から　$z^2=1-x^2-y^2=1-\dfrac{9}{25}-\dfrac{9}{100}=\dfrac{55}{100}$

よって，①を満たす実数zは$z=\pm\dfrac{\sqrt{55}}{10}$のちょうど2つある。　（^{サ}②）

したがって，△ABCが正三角形となるS上の点Cはちょうど2つある。

(ii)　$a=-\dfrac{3}{5}$のとき，②から　$x=-\dfrac{3}{5}$

③から　$-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y=-\dfrac{3}{5}$

$x=-\dfrac{3}{5}$を代入して　$y=-\dfrac{6}{5}$

このとき，① から　　$z^2=1-x^2-y^2=1-\frac{9}{25}-\frac{36}{25}=-\frac{4}{5}$

$z^2\geqq 0$ より，これを満たす実数 z は存在しないから，△ABC が正三角形となる S 上の点 C はない。　(シ ⓪)

(3)　② を ③ に代入して　　$a^2+\sqrt{1-a^2}\,y=a$

$$\sqrt{1-a^2}\,y=a(1-a)$$

$-1<a<1$ より，$\sqrt{1-a^2}\neq 0$ であるから　　$y=\frac{a(1-a)}{\sqrt{1-a^2}}$

このとき，① から　　$z^2=1-x^2-y^2=1-a^2-\frac{a^2(1-a)^2}{1-a^2}$

$$=\frac{(1-a^2)^2-a^2(1-a)^2}{1-a^2}=\frac{(1-a)(1+a)^2-a^2(1-a)}{1+a}$$

$$=\frac{\{(1+a)^2-a^2\}(1-a)}{1+a}=\frac{(1+2a)(1-a)}{1+a}\quad (ス ③)$$

$z^2\geqq 0$，$1+a>0$ であるから，$(1+2a)(1-a)\geqq 0$ である。

逆に，$(1+2a)(1-a)\geqq 0$ のとき，実数 z が存在するから，①，②，③ を満たす実数 x，y，z があることがわかる。

$(1+2a)(1-a)\geqq 0$ より　　$-\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$

$-1<a<1$ と合わせて　　$-\frac{1}{2}\leqq a<1$

以上のことから，$-\frac{1}{2}\leqq a<1$ は△ABC が正三角形となる S 上の点 C があるための必要十分条件である。　(セ ④)

参考　((1) の (*) の証明)

① が成立するとき，点 C は球 S 上に存在する。

また，② が成立するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から　　$\cos\angle\mathrm{AOC}=\cos\angle\mathrm{AOB}$

よって，△OAC，△OAB で余弦定理と，OA＝OB＝OC から

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OC}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\cos\angle\mathrm{AOC}$$
$$=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\cos\angle\mathrm{AOB}$$
$$=\mathrm{AB}^2$$

すなわち，AC＝AB が成り立つから，OA は共通，OB＝OC と合わせて

$$\triangle\mathrm{OAC}\equiv\triangle\mathrm{OAB}$$

したがって　AC＝AB

さらに，③ が成立するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から，② のときと同様にして

$$\triangle\mathrm{OBC}\equiv\triangle\mathrm{OAB}$$

したがって　BC＝AB

ゆえに　　AB＝BC＝AC

以上より，実数 x，y，z が ①，②，③ を満たすとき，点 C は S 上の点であり，△ABC は正三角形である。