

数学Ⅱ, B, C 第4問

- (1) 直線 $x=2$ 上の格子点で T の内部にあるものは
点 $(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5)$ の5個ある。

よって $a_2 = {}^{\text{ア}}5$

直線 $x=3$ 上の格子点で T の内部にあるものは
点 $(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$
 $(3, 7), (3, 8)$ の8個ある。

よって $a_3 = {}^{\text{イ}}8$

直線 $x=n$ 上の格子点で T の内部にあるものの個数は、 n が1だけ大きくなると、3個ずつ増えていくから、数列 $\{a_n\}$ は公差が ${}^{\text{エ}}3$ の等差数列である。

(ウ ㊶, オ ㊸)

$1 \leq n \leq 20$ より、 T の内部にある格子点の個数は、
初項 $a_1 = 2$ 、公差 3、項数 20 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 20 \{ 2 \cdot 2 + (20-1) \cdot 3 \} = {}^{\text{カキク}} 610$$

別解 直線 $x=n$ 上の格子点で T の内部にあるものは

点 $(n, 1), (n, 2), \dots, (n, 3n-1)$ の $(3n-1)$ 個ある。

よって $a_n = 3n-1$

ゆえに、数列 $\{a_n\}$ は初項 2、公差 ${}^{\text{エ}}3$ の等差数列である。(ウ ㊶, オ ㊸)

したがって、 T の内部にある格子点の個数は

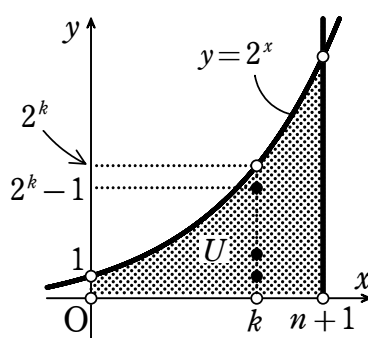
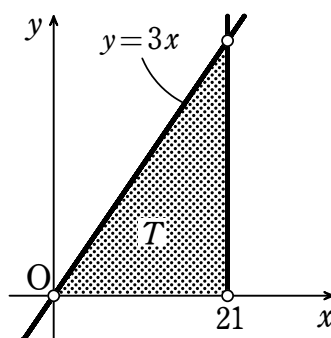
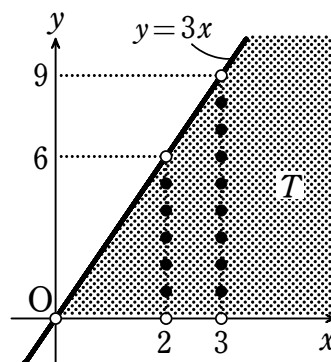
$$\sum_{n=1}^{20} (3n-1) = \frac{3}{2} \cdot 20 \cdot (20+1) - 20 = {}^{\text{カキク}} 610$$

- (2) 関数 $y=2^x$ のグラフと x 軸、 y 軸および直線 $x=n+1$ で囲まれた図形 U は右の図のようになる。

直線 $x=k$ 上の格子点で U の内部にあるものは
点 $(k, 1), (k, 2), \dots, (k, 2^k-1)$ の (2^k-1) 個
ある。(ケ ㊴)

したがって、 U の内部にある格子点の個数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2^k-1) &= \frac{2(2^n-1)}{2-1} - n \\ &= 2^{n+1} - n - 2 \quad (\text{コ ㊶}, \text{サ ㊴}) \end{aligned}$$



(3) $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$ であるとき、放物線

$y = ax^2 + bx + c$ は下に凸で、 x 軸との共有点をもたない。

よって、放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と x 軸、 y 軸および直線 $x = n + 1$ で囲まれた図形 V は右の図のようになる。

直線 $x = k$ 上の格子点で V の内部にある

ものの個数は $(ak^2 + bk + c - 1)$ 個

したがって、 V の内部にある格子点の

個数が n^3 となるとき

$$\sum_{k=1}^n (ak^2 + bk + c - 1) = n^3$$

すなわち
$$\frac{a}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{b}{2}n(n+1) + (c-1)n = n^3$$

左辺を n について整理すると

$$\frac{1}{3}an^3 + \frac{1}{2}(a+b)n^2 + \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c - 1\right)n = n^3$$

これがすべての自然数 n に対して成り立つから

$$\frac{1}{3}a = 1, \quad \frac{1}{2}(a+b) = 0, \quad \frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c - 1 = 0$$

これを解いて $a = 3$, $b = -3$, $c = 2$

(これらは、 a , b , c が整数で、 $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$ の条件を満たす。)

