数学Ⅱ，B，C 第 3 問

(1)　$F(x)=2x^3+3x^2$ のとき

$$f(x)=F'(x)={}^{ア}6x^2+{}^{イ}6x=6x(x+1)$$

$F'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ -1$

$F(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$F(x)$ は $x={}^{ウエ}-1$ で極大値をとる。

また，$G'(x)=f(x)$ であるから

$$G(x)=\int f(x)\,dx=\int(6x^2+6x)\,dx$$

$$={}^{オ}2x^3+{}^{カ}3x^2+C\quad(C\text{ は積分定数})\quad\cdots\cdots①$$

と表される。

$G'(x)=F'(x)=6x(x+1)$ であるから，$G(x)$ の増減表は，$F(x)$ と同じく右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$G'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$G(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$G(x)$ は $x={}^{キ}0$ で極小値をとる。

さらに，条件より，$G(x)$ は $x=k$ で極大値 0 をとるから，$k=-1$ であり　　$G(-1)=0$

これと ① から　　$2\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2+C=0$

ゆえに　　$C={}^{クケ}-1$

(2)　(i)　$F(x)$ が $x=0$ で極小値をとることと，$F'(x)=f(x)$ から，

$$F'(0)=f(0)={}^{コ}0$$

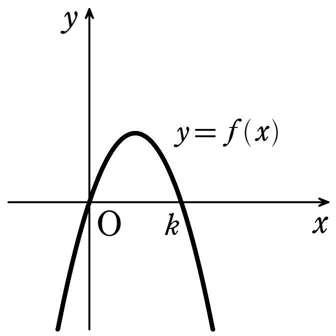
であり，$x=0$ の前後で $F'(x)$ すなわち $f(x)$ の符号は負から正に変わる。　(^{サ} ⓪)

$G(x)$ が $x=k$ で極大値をとることと，$G'(x)=f(x)$ から，

$$G'(k)=f(k)={}^{シ}0$$

であり，$x=k$ の前後で $G'(x)$ すなわち $f(x)$ の符号は正から負に変わる。　(^{ス} ①)

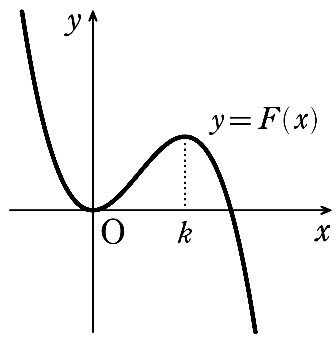
さらに，$f(x)$ は 2 次関数であり，$k>0$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



$F'(x)$ すなわち $f(x)$ の符号の変化に注意して，$F(x)$ の増減表をかくと，次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	k	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

条件より，$F(0)=0$ であるから，$y=F(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる。(^{セ} ③)



(ii)　$F(0)=0$，$F'(x)=f(x)$ であるから，すべての実数 x に対して

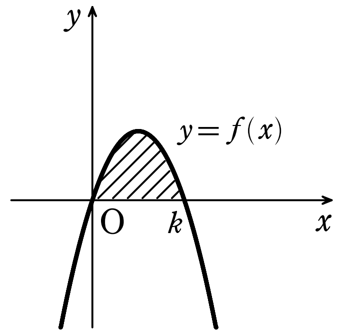
$$F(x)=F(x)-F(0)=\int_0^x F'(t)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt$$ （ソ ③，タ ⓪）

これと (i) の考察により，$F(x)$ の極大値は　$F(k)=\int_0^k f(t)\,dt$　（チ ②，ツ ⓪）

ここで，定積分 $\int_0^k f(t)\,dt$ は，右の図の斜線部分の面積と等しい。

よって，$F(x)$ の極大値は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積と等しいことがわかる。

（テ ⓪，ト ⓪）



また，$G'(x)=F'(x)$ であるから，$G(x)$ の増減表は，$F(x)$ と同じく次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	k	$\cdots$
$G'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$G(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

さらに，条件より，$G(k)=0$ であるから，すべての実数 x に対して

$$G(x)=G(x)-G(k)=\int_k^x G'(t)\,dt=\int_k^x f(t)\,dt$$

よって，$F(x)$ の極大値は　$F(k)=\int_0^k f(t)\,dt=-\int_k^0 f(t)\,dt=-G(0)$

$G(0)$ は $G(x)$ の極小値であるから，$F(x)$ の極大値は，$G(x)$ の極小値の -1 倍と等しい。　（ナ ②）

別解　$F'(x)=G'(x)=f(x)$ であるから，$F(x)$ と $G(x)$ はともに $f(x)$ の原始関数で，

$$G(x)=F(x)+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

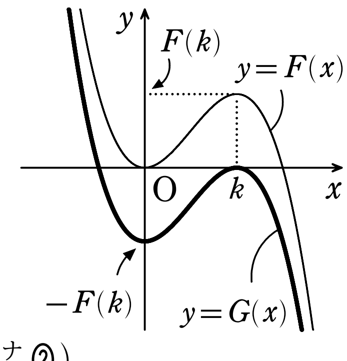
と表される。

このとき，$G(k)=F(k)+C$ であり，$G(k)=0$ であるから　　$C=-F(k)$

よって　　$G(x)=F(x)-F(k)$

ゆえに，$y=G(x)$ のグラフは，$y=F(x)$ のグラフを y 軸方向に $-F(k)$ だけ平行移動したものであり，右の図の太線部分のようになる。

したがって，$G(x)$ の極小値は $-F(k)$ であるから，



$F(x)$ の極大値は，$G(x)$ の極小値の -1 倍と等しい。　（ナ ②）