

数学Ⅱ, B, C 第1問

- (1) (i) $\alpha = \beta$ のとき, $\alpha = \theta + \frac{\pi}{6}$, $\beta = 2\theta$ より

$$\theta + \frac{\pi}{6} = 2\theta \quad \text{よって} \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{また, } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき} \quad \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- (ii) $\sin \alpha$ は点 P の y 座標, $\sin \beta$ は点 Q の y 座標であるから, $\sin \alpha = \sin \beta$ が成り立つとき, つねに点 P の y 座標と点 Q の y 座標が等しい。(②)
 (iii) (ii) と同様の点 P と点 Q について考える。

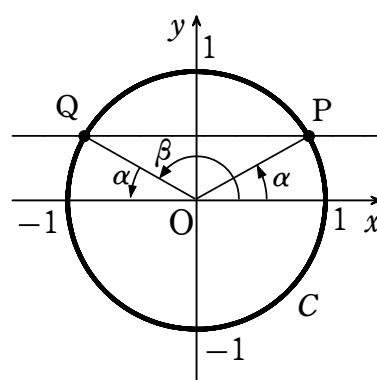
[1] $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{2}{3}\pi \quad \text{かつ} \quad 0 \leq \beta \leq \pi \quad \text{かつ} \quad \theta \neq \frac{\pi}{6} \quad \text{である}$$

ことから, ② が成り立つ, すなわち点 P の y 座標と点 Q の y 座標が等しくなるのは, 右の図のように, $\alpha + \beta = \pi$ が成り立つときである。(②)

$$\text{これより} \quad \left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 2\theta = \pi$$

$$\text{よって, } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のときの ① の解は} \quad \theta = \frac{5}{18}\pi$$



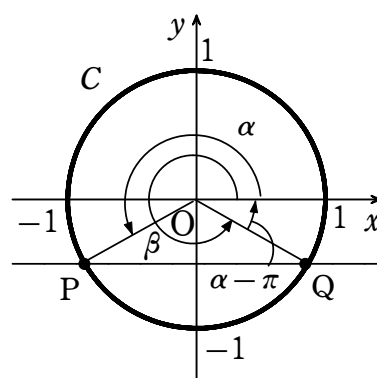
[2] $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき

$$\frac{2}{3}\pi < \alpha < \frac{7}{6}\pi \quad \text{かつ} \quad \pi < \beta < 2\pi \quad \text{かつ} \quad \theta \neq \frac{\pi}{6} \quad \text{である}$$

ことから, ② が成り立つ, すなわち点 P の y 座標と点 Q の y 座標が等しくなるのは, 右の図のように, $(\alpha - \pi) + \beta = 2\pi$, すなわち $\alpha + \beta = 3\pi$ が成り立つときである。(⑥)

$$\text{これより} \quad \left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 2\theta = 3\pi$$

$$\text{よって, } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ のときの ① の解は} \quad \theta = \frac{17}{18}\pi$$



- (2) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2\theta$ ③ とおく。(1) の α , β を用いれば, ③ は $\cos \alpha = \cos \beta$ ④ と表せる。

$$\text{ここで, } \alpha = \beta \text{ を満たす } \theta \text{ は } \theta + \frac{\pi}{6} = 2\theta \text{ から} \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ を除く ③ の解について考える。(1) の (ii) と同様に考えれば, ④ が成り立つ

とき、つねに点 P の x 座標と点 Q の x 座標は等しい。したがって、 $\theta \neq \frac{\pi}{6}$ として、
点 P の x 座標と点 Q の x 座標が等しくなるような θ の値を考えればよい。

[1] $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

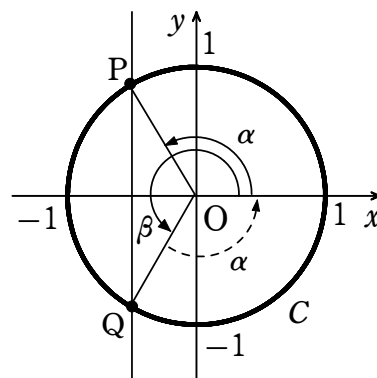
$\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{2}{3}\pi$ かつ $0 \leq \beta \leq \pi$ かつ $\theta \neq \frac{\pi}{6}$ であるから、点 P および点 Q は第 1 象限
または第 2 象限にあり、この範囲で点 P の x 座標と点 Q の x 座標が等しくなることは
ない。

[2] $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき

$\frac{2}{3}\pi < \alpha < \frac{7}{6}\pi$ かつ $\pi < \beta < 2\pi$ かつ $\theta \neq \frac{\pi}{6}$ である
ことから、④ が成り立つ、すなわち点 P の x 座標
と点 Q の x 座標が等しくなるのは、右の図の
ように、 α が第 2 象限の角、 β が第 3 象限の角の
ときで、 $\alpha + \beta = 2\pi$ が成り立つときである。

$$\text{これより } \left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 2\theta = 2\pi$$

$$\text{よって、} \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ のときの ③ の解は } \theta = \frac{11}{18}\pi$$



[1], [2] を含む以上の考察から、 $0 \leq \theta < \pi$ のとき、③ の解は $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\frac{11}{18}\pi$

【参考】 三角関数の和と積の公式により、③ は以下のように解くこともできる。

$$\cos 2\theta - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$-2\sin\left(\frac{3}{2}\theta + \frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{\pi}{12}\right) = 0$$

$0 \leq \theta < \pi$ より、 $\frac{\pi}{12} \leq \frac{3}{2}\theta + \frac{\pi}{12} < \frac{19}{12}\pi$, $-\frac{\pi}{12} \leq \frac{1}{2}\theta - \frac{\pi}{12} < \frac{5}{12}\pi$ であるから

$$\frac{3}{2}\theta + \frac{\pi}{12} = \pi \text{ または } \frac{1}{2}\theta - \frac{\pi}{12} = 0$$

$$\text{よって } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{11}{18}\pi$$