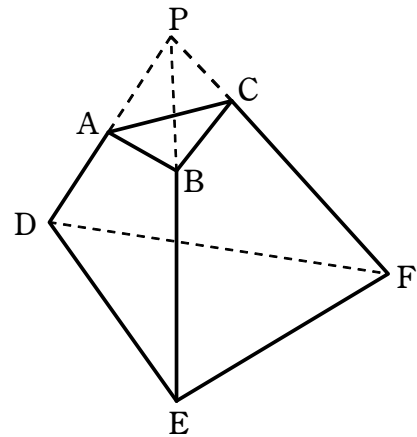


数学 I , A 第 3 問

- (1) 点 P は直線 AD 上にあり、直線 AD は平面 ABED と平面 ACFD との交線であるから、点 P は平面 ACFD 上にあることがわかる。^{(ア) ②}
 また、点 P は直線 BE 上にあり、直線 BE は平面 ABED と平面 BCFE との交線であるから、点 P は平面 BCFE 上にあることがわかる。^{(イ) ③}
 平面 ACFD と平面 BCFE との交線は直線 CF であるから、点 P は直線 CF 上にもあることがわかる。
 したがって、3 直線 AD, BE, CF は点 P で交わる。



- (2) (i) 面 ABC は 1 辺の長さが 3 の正三角形であるから $AB = BC = CA = 3$
 平面 ABED と球面 S が交わる部分は円であり、4 点 A, B, E, D はその円周上にある。

よって、右の図のように、四角形 ABED は円に内接するから $\angle PAB = \angle PED$

また $\angle APB = \angle EPD$ (共通)

よって、 $\triangle PAB \sim \triangle PED$ であり、その相似比は

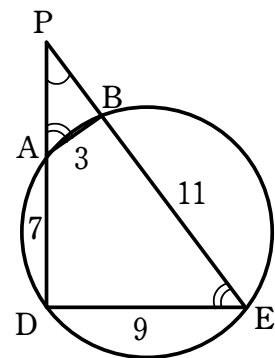
$$AB : ED = 3 : 9 = 1 : 3$$

したがって、 $PA : PE = PB : PD = 1 : 3$ であるから

$$3PA = PE, 3PB = PD$$

すなわち $3PA = PB + 11, 3PB = PA + 7$

これを解くと $PA = 5, PB = 4$



- (ii) 平面 BCFE と球面 S が交わる部分も円であり、4 点 B, C, F, E はその円周上にある。

方べきの定理により $PB \cdot PE = PC \cdot PF$

すなわち $4 \cdot (4 + 11) = PC \cdot (PC + 17)$

よって $PC^2 + 17PC - 60 = 0$

すなわち $(PC + 20)(PC - 3) = 0$

$PC > 0$ であるから $PC = 3$

また、 $\triangle PBC \sim \triangle PFE$ であり

$$BC : FE = PC : PE$$

すなわち $3 : EF = 3 : (4 + 11)$

よって $EF = 15$

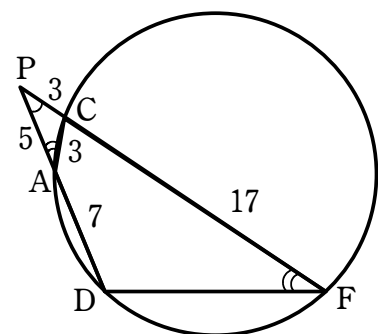
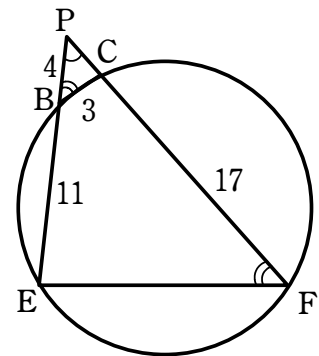
同様に、平面 ACFD と球面 S が交わる部分も円であり、4 点 A, C, F, D はその円周上にある。

このとき、 $\triangle PCA \sim \triangle PDF$ であり

$$CA : DF = PC : PD$$

すなわち $3 : DF = 3 : (5 + 7)$

よって $DF = 12$



(iii) $\triangle PDE$ において,

$$PD^2 + DE^2 = 12^2 + 9^2 = 225, \quad PE^2 = 15^2 = 225$$

であるから $PD^2 + DE^2 = PE^2$

よって $\angle PDE = 90^\circ$

すなわち $\angle ADE = 90^\circ$ ③

$\triangle PDF$ において,

$$PD^2 + DF^2 = 12^2 + 12^2 = 288, \quad PF^2 = 20^2 = 400$$

であるから $PD^2 + DF^2 \neq PF^2$

よって $\angle PDF \neq 90^\circ$ すなわち $\angle ADF \neq 90^\circ$ ④

$\triangle DEF$ において,

$$DE^2 + DF^2 = 9^2 + 12^2 = 225, \quad EF^2 = 15^2 = 225$$

であるから $DE^2 + DF^2 = EF^2$

よって $\angle EDF = 90^\circ$ ⑤

(a) 平面 ABED と平面 DEF の交線 DE に対して, ③, ⑤ から

$$AD \perp DE, \quad DF \perp DE$$

一方, ④ から, 直線 AD と直線 DF は垂直でない。

よって, 交線 DE と垂直である 2 直線 AD, DF のなす角は直角でない。

ゆえに, 平面 ABED と平面 DEF は垂直でないから 偽

(b) ③, ⑤ から $AD \perp DE, \quad DF \perp DE$

よって, 直線 DE は平面 ACFD 上の交わる 2 直線 AD, DF と垂直である。

ゆえに, 直線 DE は平面 ACFD に垂直であるから 真

(c) (b) より, 直線 DE は平面 ACFD と垂直である。

よって, 平面 ACFD 上にある直線 AC は直線 DE と垂直であるから 真

したがって, 命題 (a), (b), (c) の真偽の組合せとして正しいものは セ ④

参考 $\angle ADE = 90^\circ, \angle EDF = 90^\circ$ であることは,

$$DE : PD : PE = 9 : 12 : 15 = 3 : 4 : 5, \quad DE : DF : EF = 9 : 12 : 15 = 3 : 4 : 5$$

であることから判断してもよい。

また, $PD^2 + DF^2 < PF^2$ であるから, $\angle PDF$ すなわち $\angle ADF$ は鈍角である。

