

数学Ⅰ, A 第1問〔2〕

(1) $\angle AOH = \alpha$ であるから $AH = 2\sin \alpha$

よって $PA = 2AH = 4\sin \alpha$ ①

同様にして, $\angle BO'H' = \beta$ であるから

$$BH' = 4\sin \beta$$

ゆえに $PB = 2BH' = 8\sin \beta$ ②

$\triangle PAB$ の外接円の半径を R_1 とおくと, 正

弦定理により

$$\frac{PA}{\sin \beta} = \frac{PB}{\sin \alpha} = 2R_1 \text{ ③}$$

(^ス①, ^セ②)

$$\frac{PA}{\sin \beta} = \frac{PB}{\sin \alpha} \text{ の両辺に } \sin \alpha \sin \beta \text{ を掛けて } PA \sin \alpha = PB \sin \beta \text{ ④}$$

この式に, ①と②を代入すると $4\sin \alpha \cdot \sin \alpha = 8\sin \beta \cdot \sin \beta$

よって $\sin^2 \alpha = 2\sin^2 \beta$ ゆえに $\sin \alpha = \pm \sqrt{2} \sin \beta$

α は鋭角であり, 図より β も鋭角であるから $0 < \sin \alpha < 1, 0 < \sin \beta < 1$

よって $\sin \alpha = \sqrt{2} \sin \beta$

これを④に代入すると $PA \cdot \sqrt{2} \sin \beta = PB \sin \beta$

ゆえに $PB = \sqrt{2} PA$

これと, ③から $\frac{\sqrt{2} PA}{\sin \alpha} = 2R_1$

①を代入して $\frac{\sqrt{2} \cdot 4\sin \alpha}{\sin \alpha} = 2R_1$

よって $R_1 = 2\sqrt{2}$

(2) 右の図のように, 円 O の中心 O から直線 QA に引いた垂線と直線 QA との交点を I , 円 O' の中心 O' から直線 QB に引いた垂線と直線 QB との交点を I' とする。

$\angle AOI = \angle QAB$ であるから

$$AI = 2\sin \angle QAB$$

よって $QA = 2AI = 4\sin \angle QAB$

同様にして, $\angle BO'I' = \angle QBA$ である

から $BI' = 4\sin \angle QBA$

ゆえに $QB = 2BI' = 8\sin \angle QBA$

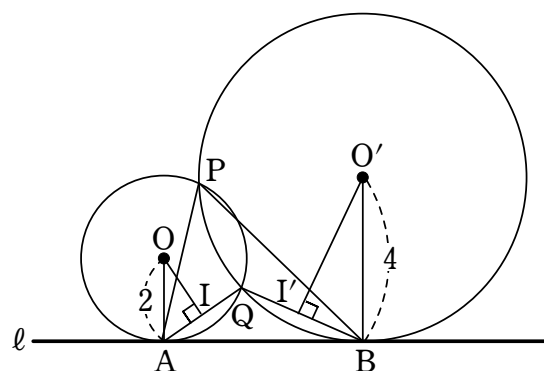
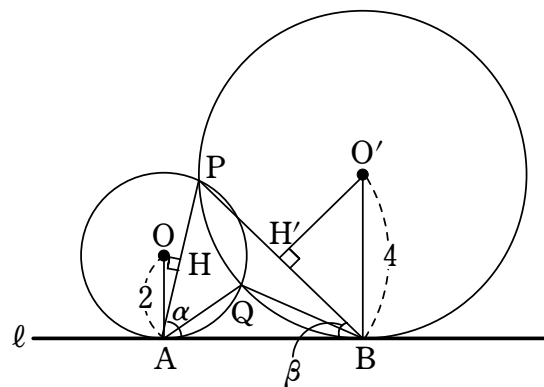
これらは(1)と同様の式であるから, (1)

と同じ方法で $R_2 = 2\sqrt{2}$ が導かれる。

よって $R_1 = R_2$ (^ツ①)

また, $\triangle PAB$ において, 正弦定理により

$$\frac{AB}{\sin \angle APB} = 2R_1 \text{ ⑤}$$



△QABにおいて、正弦定理により

$$\frac{AB}{\sin \angle AQB} = 2R_2$$

$R_1 = R_2$ から $\frac{AB}{\sin \angle APB} = \frac{AB}{\sin \angle AQB}$

よって $\sin \angle APB = \sin \angle AQB$ (⑦ ⑩)

(3) $AB = 2\sqrt{7}$, $R_1 = 2\sqrt{2}$ を ⑤ に代入すると $\frac{2\sqrt{7}}{\sin \angle APB} = 2 \cdot 2\sqrt{2}$

よって $\sin \angle APB = \frac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$

$\sin \angle APB = \sin \angle AQB$ から $\angle APB + \angle AQB = 180^\circ$

$\angle APB < \angle AQB$ より、 $\angle APB$ は鋭角であるから $\cos \angle APB > 0$

ゆえに $\cos \angle APB = \sqrt{1 - \sin^2 \angle APB} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

△PABにおいて、余弦定理により

$$AB^2 = PA^2 + PB^2 - 2 \cdot PA \cdot PB \cos \angle APB$$

であり、(1) より、 $PB = \sqrt{2} PA$ であるから

$$(2\sqrt{7})^2 = PA^2 + (\sqrt{2} PA)^2 - 2 \cdot PA \cdot \sqrt{2} PA \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$$

よって $PA^2 = 14$

$PA > 0$ であるから $PA = \sqrt{14}$

【参考】 QA の長さは次のように求められる。

$$\sin \angle APB = \sin \angle AQB \text{ から } \sin \angle AQB = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

$\angle APB + \angle AQB = 180^\circ$, $\angle APB < \angle AQB$ より、 $\angle AQB$ は鈍角であるから

$$\cos \angle AQB = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

△QABにおいて、余弦定理により

$$AB^2 = QA^2 + QB^2 - 2 \cdot QA \cdot QB \cos \angle AQB$$

であり、 $QB = \sqrt{2} QA$ であるから

$$(2\sqrt{7})^2 = QA^2 + (\sqrt{2} QA)^2 - 2 \cdot QA \cdot \sqrt{2} QA \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

よって $QA^2 = 7$

$QA > 0$ であるから $QA = \sqrt{7}$