数学Ⅱ・B 第 1 問〔1〕

(1) (i) $y=\log_3 x$ に $x=27$ を代入すると

$$y=\log_3 27=\log_3 3^3=3$$

よって，$y=\log_3 x$ のグラフは点 (27，ア3) を通る。

また，$y=\log_2 \dfrac{x}{5}$ に $y=1$ を代入すると　　$1=\log_2 \dfrac{x}{5}$

ゆえに，$\dfrac{x}{5}=2$ であるから　　$x=10$

したがって，$y=\log_2 \dfrac{x}{5}$ のグラフは点 (イウ10，1) を通る。

(ii) $k>0$，$k\neq 1$ のとき，$y=\log_k x$ に $x=1$ を代入すると　　$y=\log_k 1=0$

よって，$y=\log_k x$ のグラフは，k の値によらず定点 (エ1，オ0) を通る。

(iii) $k=2$，3，4 のときの $y=\log_k x$ のグラフの概形を考える。

(ii) から，$y=\log_k x$ のグラフは k の値によらず定点 (1，0) を通る。

また，$x\neq 1$ のとき，$y=\log_k x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 k}$ と表される。

$\dfrac{1}{\log_2 4}<\dfrac{1}{\log_2 3}<\dfrac{1}{\log_2 2}$ であるから，

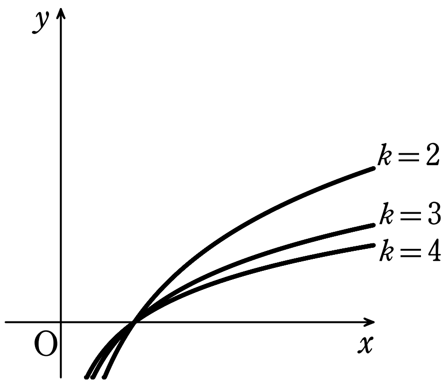
$\log_2 x>0$ すなわち $x>1$ のとき

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 4}<\frac{\log_2 x}{\log_2 3}<\frac{\log_2 x}{\log_2 2}$$

よって，$x>1$ のとき

$$\log_4 x<\log_3 x<\log_2 x$$

ゆえに，$k=2$，3，4 のときの $y=\log_k x$ のグラフの概形は右の図のようになる。(カ ⓪)



参考　$y=\log_k x$ のグラフが k の値によらず定点 (1，0) を通ることと，$y=p$ であるときの x の値の大小を考えてグラフの概形を判断してもよい。

(ii) から，$y=\log_k x$ のグラフは k の値によらず定点 (1，0) を通る。

また，0 より大きい実数 p に対して，$y=p$ であるときの x の値を考えると

$k=2$ のとき，$p=\log_2 x$ であるから

$$x=2^p$$

$k=3$ のとき，$p=\log_3 x$ であるから

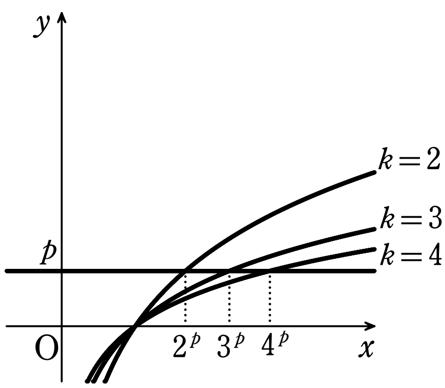
$$x=3^p$$

$k=4$ のとき，$p=\log_4 x$ であるから

$$x=4^p$$

$p>0$ であるから　　$2^p<3^p<4^p$

よって，$k=2$，3，4 のときの $y=\log_k x$ のグラフの概形は　カ ⓪

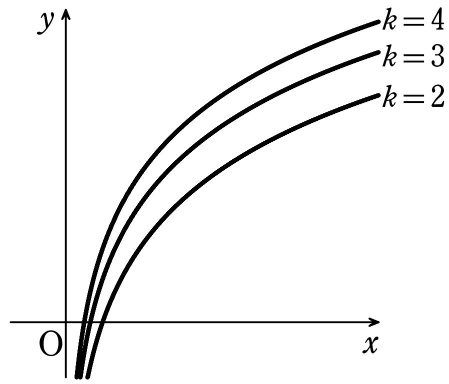


$k=2$，3，4 のときの $y=\log_2 kx$ のグラフの概形を考える。

$x>0$ のとき，$2x<3x<4x$ であるから

$$\log_2 2x<\log_2 3x<\log_2 4x$$

したがって，$k=2$，3，4 のときの $y=\log_2 kx$ のグラフの概形は右の図のようになる。(キ ⑤)



参考　$y=\log_2 kx$ のグラフが k の値によらず通る定点をもたないことと，$y=\log_2 kx$ のグラフと x 軸の交点を考えてグラフの概形を判断してもよい。

$\log_2 kx=\log_2 k+\log_2 x$ であるから，$k \fallingdotseq 1$ のとき，$y=\log_2 kx$ のグラフは k の値によらず通る定点をもたない。

また，$y=0$ とすると，$kx=1$ から，$y=\log_2 kx$ のグラフは点 $\left(\frac{1}{k},\ 0\right)$ を通る。

ゆえに，$k=2$，3，4 のとき，それぞれ点 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，点 $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$，点 $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$ を通る。

よって，$k=2$，3，4 のときの $y=\log_2 kx$ のグラフの概形は　キ ⑤

(2)　(i)　$\log_x y=2$ から　　$y=x^2$

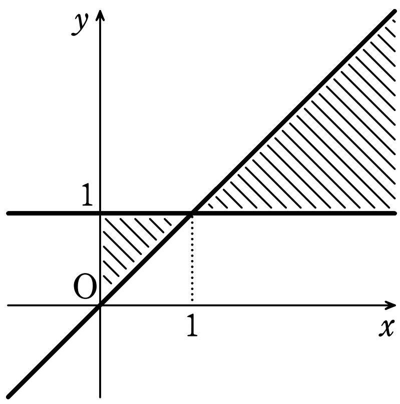
よって，方程式 $\log_x y=2$ の表す図形は放物線 $y=x^2$ の $x>0$，$x \fallingdotseq 1$，$y>0$ の部分。(ク ②)

(ii)　$0<\log_x y<1$ から　　$\log_x 1<\log_x y<\log_x x$

ゆえに，$0<x<1$ のとき　　$x<y<1$

$x>1$ のとき　　$1<y<x$

これらの不等式の表す領域を図示すると，右の図の斜線部分になる。ただし，境界線は含まない。(ケ ②)



数学Ⅱ・B　第 1 問〔2〕

(1)　$S(x)=0$ すなわち $x^2+4x+7=0$ を解くと

$$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot 7}={}^{\text{コサ}}-2\pm\sqrt{{}^{\text{シ}}3}\,i$$

$P(x)=2x^3+7x^2+10x+5$ を $S(x)=x^2+4x+7$ で割ったときの商 $T(x)$ は

$$T(x)={}^{\text{ス}}2x-{}^{\text{セ}}1$$

余り $U(x)$ は

$$U(x)={}^{\text{ソタ}}12$$

$$\begin{array}{r}
2x-1 \\
x^2+4x+7\,\big)\overline{\,2x^3+7x^2+10x+5} \\
2x^3+8x^2+14x \\ \hline
-x^2-4x+5 \\
-x^2-4x-7 \\ \hline
12
\end{array}$$

(2)　(i)　余り $U(x)$ が定数になるとき，定数 k を用いて $U(x)=k$ とおくと

$$P(x)=S(x)T(x)+k$$

また，方程式 $S(x)=0$ が異なる 2 つの解 α，β をもつとき　　$S(\alpha)=S(\beta)=0$

これらのことから　　$P(\alpha)=S(\alpha)T(\alpha)+k=k$

$$P(\beta)=S(\beta)T(\beta)+k=k$$

すなわち　　$P(\alpha)=P(\beta)=k$　（${}^{\text{チ}}$ ③）

したがって，余りが定数になるとき，$P(\alpha)=P(\beta)$ が成り立つ。（${}^{\text{ツ}}$ ①）

(ii)　逆に，$P(\alpha)=P(\beta)$ が成り立つとき，余りが定数になるかを考える。

$S(x)$ は 2 次式であるから，余りは 1 次式または定数であり，定数 m，n を用いて $U(x)=mx+n$ とおける。

このとき　　$P(x)=S(x)T(x)+mx+n$　（${}^{\text{テ}}$ ①）

この等式に $x=\alpha$，$x=\beta$ を代入すると，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ であるから

$$P(\alpha)=m\alpha+n\quad かつ\quad P(\beta)=m\beta+n\quad （{}^{\text{ト}}\ ①）$$

$P(\alpha)=P(\beta)$ であるから　　$m\alpha+n=m\beta+n$　　　すなわち　　$m(\alpha-\beta)=0$

$\alpha\neq\beta$ であるから　　$m=0$　（${}^{\text{ナ}}$ ③）

よって，$U(x)=n$ になるから，$P(\alpha)=P(\beta)$ が成り立つとき，余りは定数になる。

(i)，(ii) から，方程式 $S(x)=0$ が異なる 2 つの解 α，β をもつとき，$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと $P(\alpha)=P(\beta)$ であることは同値である。

(3)　$S(x)=0$ すなわち $x^2-x-2=0$ を解くと　　$x=-1$，2

(2) から，$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になるとき　　$P(-1)=P(2)$

ここで　　$P(-1)=(-1)^{10}-2\cdot(-1)^9-p\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)=8-p$

$$P(2)=2^{10}-2\cdot 2^9-p\cdot 2^2-5\cdot 2=-4p-10$$

よって　　$8-p=-4p-10$

ゆえに　　$p={}^{\text{ニヌ}}-6$

余りは $P(-1)$ であるから　　$P(-1)=8-(-6)={}^{\text{ネノ}}14$

参考　(2) の結論を用いなくても次のように解答できる。

$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になるとき，商 $T(x)$ と定数 n を用いて

$$P(x)=(x^2-x-2)T(x)+n$$

と表される。

$P(-1)=8-p$, $P(2)=-4p-10$ であるから

$$8-p=n,\quad -4p-10=n$$

これを解くと　　$p={}^{ニヌ}-6$, $n={}^{ネノ}14$

数学Ⅱ・B　第 2 問

(1)　(i)　$f(x)=3(x-1)(x-2)=3x^2-9x+6$ から　　$f'(x)=6x-9$

$f'(x)=0$ とすると　　$6x-9=0$　　　　よって　　$x=\dfrac{{}^{\text{ア}}3}{{}^{\text{イ}}2}$

(ii)　　$S(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

$$=\int_0^x(3t^2-{}^{\text{ウ}}9t+{}^{\text{エ}}6)\,dt=\left[t^3-\frac{9}{2}t^2+6t\right]_0^x$$

$$=x^3-\frac{{}^{\text{オ}}9}{{}^{\text{カ}}2}x^2+{}^{\text{キ}}6x$$

$S'(x)=3x^2-9x+6=3(x-1)(x-2)$

$S'(x)=0$ とすると

$x=1,\ 2$

$S(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$S(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$S(x)$ は $x={}^{\text{ク}}1$ で極大値 $1^3-\dfrac{9}{2}\cdot1^2+6\cdot1=\dfrac{{}^{\text{ケ}}5}{{}^{\text{コ}}2}$,

$x={}^{\text{サ}}2$ で極小値 $2^3-\dfrac{9}{2}\cdot2^2+6\cdot2={}^{\text{シ}}2$　をとる。

(iii)　$S'(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=f(x)$ であるから　　$f(3)=S'(3)$

$S'(3)$ は関数 $y=S(x)$ のグラフ上の点 $(3,\ S(3))$ における接線の傾きを表すから

${}^{\text{ス}}$③

(2)　$f(x)=0$ とすると，$3(x-1)(x-m)=0$ から

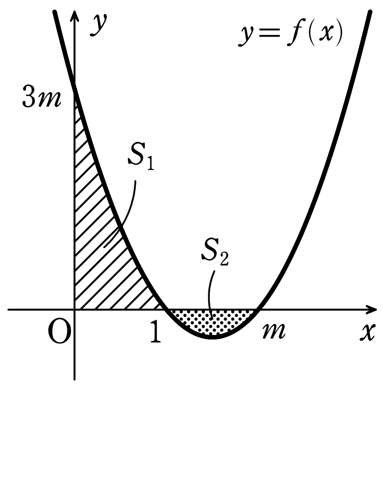
$x=1,\ m$　$(m>1)$

S_1 は右の図の斜線部分の面積であるから

$S_1=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$　$({}^{\text{セ}}$⓪$)$

S_2 は右の図の網目部分の面積であるから

$S_2=\displaystyle\int_1^m\{-f(x)\}\,dx$　$({}^{\text{ソ}}$⑤$)$



$S_1=S_2$ となるとき　　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_1^m\{-f(x)\}\,dx$

すなわち　　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=-\int_1^m f(x)\,dx$

よって　　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^m f(x)\,dx=0$

ゆえに　　$\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx=0$　$({}^{\text{タ}}$①$)$

ここで，(1) と同様に

$S'(x)=f(x)=3(x-1)(x-m)$

$S'(x)=0$ とすると　　$x=1,\ m$

$S(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	m	$\cdots$
$S'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$S(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$S_1=S_2$ が成り立つとき　　$S(m)=\int_0^m f(x)\,dx=0$

ゆえに，$y=S(x)$ のグラフの概形は図 1 のようになる。　(チ ①)

また，$S_1>S_2$ が成り立つとき，$\int_0^1 f(x)\,dx>\int_1^m \{-f(x)\}\,dx$ から　　$\int_0^m f(x)\,dx>0$

よって　　$S(m)=\int_0^m f(x)\,dx>0$

ゆえに，$y=S(x)$ のグラフの概形は図 2 のようになる。　(ツ ②)

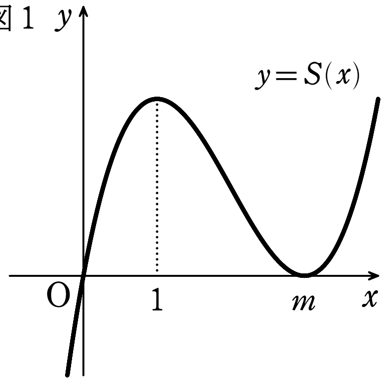
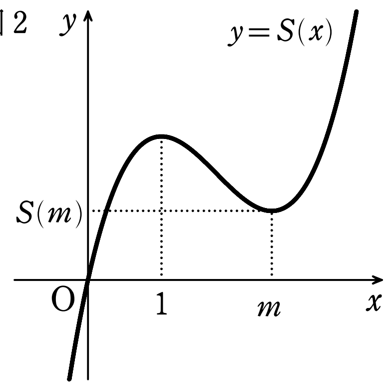
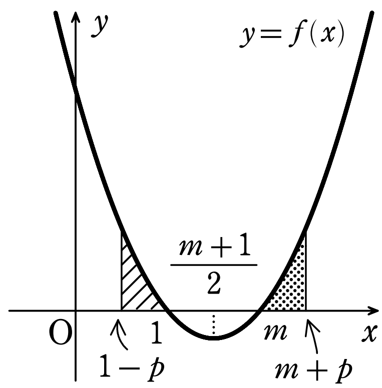
図 1


図 2


(3)　関数 $y=f(x)$ のグラフは，直線 $x=\dfrac{m+1}{2}$ を軸とする放物線であるから，直線 $x=\dfrac{m+1}{2}$ に関して対称である。　(テ ③)

よって，すべての正の実数 p に対して，右の図の斜線部分と網目部分の面積は等しいから

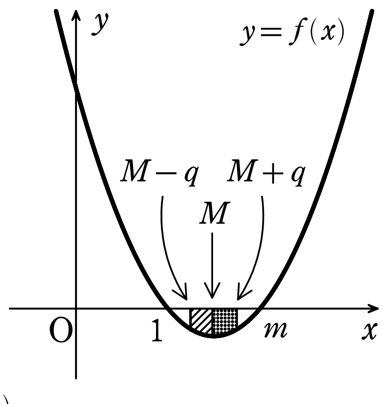
$$\int_{1-p}^1 f(x)\,dx=\int_m^{m+p} f(x)\,dx \quad \cdots\cdots ①$$　(ト ④)



同様に，$M=\dfrac{m+1}{2}$ とおくと，$0<q\leqq M-1$ であるすべての実数 q に対して，右の図の斜線部分と網目部分の面積は等しいから

$$\int_{M-q}^M \{-f(x)\}\,dx=\int_M^{M+q} \{-f(x)\}\,dx \quad \cdots\cdots ②$$

(ナ ②)



ここで，すべての実数 α，β に対して，

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_0^\beta f(x)\,dx-\int_0^\alpha f(x)\,dx=S(\beta)-S(\alpha)$$

が成り立つから，① より　　$S(1)-S(1-p)=S(m+p)-S(m)$

すなわち　　$S(1-p)+S(m+p)=S(1)+S(m)$　(ニ ⓪)

同様に，$\int_\alpha^\beta \{-f(x)\}\,dx=-\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=-\{S(\beta)-S(\alpha)\}$ が成り立つから，② より

$$-\{S(M)-S(M-q)\}=-\{S(M+q)-S(M)\}$$

すなわち　　$2S(M)=S(M+q)+S(M-q)$　(ヌ ④)

よって，2 点 $(1-p,\ S(1-p))$，$(m+p,\ S(m+p))$ を結ぶ線分の中点の座標は

$$\left(\frac{(1-p)+(m+p)}{2},\ \frac{S(1-p)+S(m+p)}{2}\right)$$

すなわち　$\left(\dfrac{1+m}{2},\ \dfrac{S(1)+S(m)}{2}\right)$

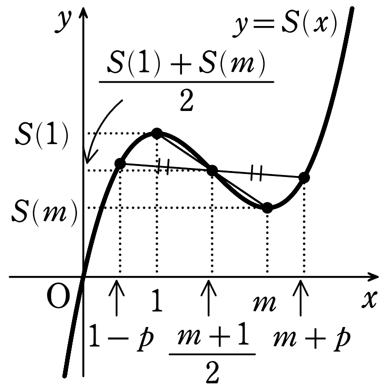
これは p の値によらず 1 つに定まる。

さらに，$2S(M)=S(M+q)+S(M-q)$ において，$q=M-1$ とすると

$$2S(M)=S(2M-1)+S(1)$$

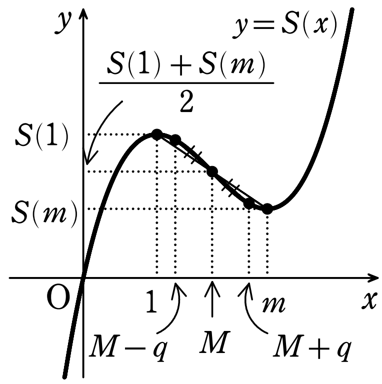
$M=\dfrac{m+1}{2}$ であるから　$2S\left(\dfrac{m+1}{2}\right)=S(m)+S(1)$

よって　$\dfrac{S(1)+S(m)}{2}=S\left(\dfrac{m+1}{2}\right)$



ゆえに，中点の座標は $\left(\dfrac{m+1}{2},\ S\left(\dfrac{m+1}{2}\right)\right)$ と表されるから，その中点は関数 $y=S(x)$ のグラフ上にあることがわかる。

以上から，すべての正の実数 p に対して，2 点 $(1-p,\ S(1-p))$，$(m+p,\ S(m+p))$ を結ぶ線分の中点は，p の値によらず 1 つに定まり，関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある。　(ネ ②)



参考　$0<q\leqq M-1$ であるすべての実数 q に対し，2 点 $(M-q,\ S(M-q))$，$(M+q,\ S(M+q))$ を結ぶ線分の中点も，q の値によらず 1 つに定まり，その中点は関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある点 $(M,\ S(M))$ であることがわかる。

したがって，3 次関数 $y=S(x)$ のグラフは，点 $\left(\dfrac{m+1}{2},\ S\left(\dfrac{m+1}{2}\right)\right)$ に関して対称である。

数学Ⅱ・B 第 3 問

(1) 表 1 から，確率変数 X の平均 m は　$m=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$　（ア ⓪）

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき，$n=300$ は十分に大きいから，標本平均 $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。（イ ③）

$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}$ から

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots\cdots+(X_n-\overline{X})^2\}\\
&=\frac{1}{n}\{(X_1{}^2+X_2{}^2+\cdots\cdots+X_n{}^2)-2(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)\overline{X}+n(\overline{X})^2\}\\
&=\frac{1}{n}\{(X_1{}^2+X_2{}^2+\cdots\cdots+X_n{}^2)-2\cdot n\overline{X}\cdot\overline{X}+n(\overline{X})^2\}\\
&=\frac{1}{n}\{(X_1{}^2+X_2{}^2+\cdots\cdots+X_n{}^2)-n(\overline{X})^2\}\\
&=\frac{1}{n}(X_1{}^2+X_2{}^2+\cdots\cdots+X_n{}^2)-(\overline{X})^2
\end{aligned}$$

よって，標本の標準偏差 S は　$S=\sqrt{\dfrac{1}{n}(X_1{}^2+X_2{}^2+\cdots\cdots+X_n{}^2)-(\overline{X})^2}$　（ウ ①）

ここで，$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ について，$X_i=1$ または $X_i=0$ であるから

$$X_i{}^2=X_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

が成り立つ。

したがって　$S=\sqrt{\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)-(\overline{X})^2}$

$=\sqrt{\overline{X}-(\overline{X})^2}=\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}$　（エ ②）

ここで，標本の大きさ $n=300$ は十分に大きいから，母標準偏差 σ の代わりに標本の標準偏差 S を用いることができる。

このことから，母平均 m の信頼度 95 %の信頼区間は，正規分布表より

$$\overline{X}-1.96\cdot\frac{S}{\sqrt{300}}\leqq m\leqq\overline{X}+1.96\cdot\frac{S}{\sqrt{300}}$$

表 2 から　$\overline{X}=\dfrac{1\cdot75+0\cdot225}{300}=\dfrac{75}{300}=\dfrac{1}{4}=0.25$

よって　$S=\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{4}\right)}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

したがって　$\overline{X}-1.96\cdot\dfrac{S}{\sqrt{300}}=0.25-1.96\cdot\dfrac{1}{\sqrt{300}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$=0.25-1.96\cdot\dfrac{1}{10\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}=0.25-0.049=0.201$

$\overline{X}+1.96\cdot\dfrac{S}{\sqrt{300}}=0.25+0.049=0.299$

ゆえに，母平均 m の信頼度 95 %の信頼区間は　$0.201\leqq m\leqq0.299$　（オ ⓪）

(2)　$p=\dfrac{1}{4}$ であるから，$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k$ について　　$P(X_j=1)=\dfrac{1}{4}$，$P(X_j=0)=\dfrac{3}{4}$

また，$X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_k$ は互いに独立である。

$k=4$ のとき，$U_4=1$ または $U_4=0$ である。

表 3 から，$U_4=1$ となる $(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4)$ の組は

$$(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4)=(1,\ 1,\ 1,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1,\ 1)$$

これらの組になる確率はともに　　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3}{256}$

よって　　$P(U_4=1)=\dfrac{3}{256}\cdot 2=\dfrac{3}{128}$

$P(U_4=0)=1-P(U_4=1)$ であるから

$$E(U_4)=1\cdot\frac{3}{128}+0\cdot\left(1-\frac{3}{128}\right)=\frac{{}^{カ}3}{128}$$

$k=5$ のとき，$U_5=1$ または $U_5=0$ である。

$U_5=1$ となる $(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5)$ の組は

$$\begin{aligned}&(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5)\\&=(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1),\\&\quad(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1),\ (1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1)\end{aligned}$$

$(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5)=(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1)$ のとき

これらの組になる確率は 3 組すべて　　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{9}{1024}$

$(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5)=(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1),\ (1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1)$ のとき

これらの組になる確率はともに　　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^4\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3}{1024}$

よって　　$P(U_5=1)=\dfrac{9}{1024}\cdot 3+\dfrac{3}{1024}\cdot 2=\dfrac{33}{1024}$

$P(U_5=0)=1-P(U_5=1)$ であるから

$$E(U_5)=1\cdot\frac{33}{1024}+0\cdot\left(1-\frac{33}{1024}\right)=\frac{{}^{キク}33}{1024}$$

xy 平面上で，点 $\left(4,\ \dfrac{3}{128}\right)$ と点 $\left(5,\ \dfrac{33}{1024}\right)$ を通る直線の方程式は

$$y-\frac{3}{128}=\left(\frac{33}{1024}-\frac{3}{128}\right)(x-4)$$

すなわち　　$y=\dfrac{9}{1024}(x-4)+\dfrac{3}{128}$

点 $(300,\ E(U_{300}))$ はこの直線上の点であるから

$$E(U_{300})=\frac{9}{1024}\cdot 296+\frac{3}{128}=\frac{336}{128}=\frac{{}^{ケコ}21}{{}^{サ}8}$$

数学Ⅱ・B　第 4 問

(1)　$a_{n+1}=a_n+14$，$a_1=10$ より

$$a_2=a_1+14=10+14={}^{アイ}24$$

$$a_3=a_2+14=24+14={}^{ウエ}38$$

数列 $\{a_n\}$ は初項 a_1，公差 14 の等差数列であるから，一般項は

$$a_n=a_1+{}^{オカ}14(n-1)$$

(2)　$2b_{n+1}-b_n+3=0$ を変形すると　　$b_{n+1}+3=\dfrac{1}{2}(b_n+3)$

数列 $\{b_n+3\}$ は初項 b_1+3，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n+3=(b_1+3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって　　$b_n=(b_1+{}^{キ}3)\left(\dfrac{{}^{ク}1}{{}^{ケ}2}\right)^{n-1}-{}^{コ}3$

(3)　$(c_n+3)(2c_{n+1}-c_n+3)=0$　…… ①

(i)　$c_1=5$ のとき　　$(5+3)(2c_2-5+3)=0$　…… ②

整理すると　　$c_2-1=0$

よって　　$c_2={}^{サ}1$

$c_3=-3$ のとき　　$(c_2+3)\{2\cdot(-3)-c_2+3\}=0$　…… ③

整理すると　　$(c_2+3)^2=0$

よって　　$c_2={}^{シス}-3$

③ と同様に考えて　　$c_1={}^{セソ}-3$

(ii)　$c_3=-3$，$c_4=5$ のとき，(i)，② と同様に考えて　　$c_1=-3$，$c_2=-3$，$c_5={}^{タ}1$

$c_4=83$ のとき　　$(83+3)(2c_5-83+3)=0$

整理すると　　$c_5-40=0$

よって　　$c_5={}^{チツ}40$

(iii)　数学的帰納法により，

[1]　$c_1\fallingdotseq -3$

[2]　$n=k$ のとき $c_n\fallingdotseq -3$ が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときも $c_n\fallingdotseq -3$ が成り立つこと

の 2 つを示せば，命題 A が真であることが証明できる。

[1] は命題 A の仮定であるから，[2] を示せばよい。(^{テ} ③)

(iv)　(I)　$c_1=3\fallingdotseq -3$ であるから，命題 A よりすべての自然数 n について $c_n\fallingdotseq -3$ が成り立つ。

よって，$c_1=3$ かつ $c_{100}=-3$ であり，かつ ① を満たす数列 $\{c_n\}$ は存在しない。

すなわち　　偽

(II)　一般項が $c_n=-3$ ($n=1$，2，3，……) であるような数列 $\{c_n\}$ は $c_1=-3$，

$c_{100}=-3$ であり，かつ ① を満たす。

よって　真

(III)　$c_1=c_2=\cdots\cdots=c_{99}=-3$，$c_{100}=3$ であるような数列 $\{c_n\}$ は，(i)，(ii) と同様に考えると，99 以下の自然数 n に対して ① を満たす。

また，101 以上の自然数 n に対して，c_{100} と ① から帰納的に c_n を定めることで ① を満たす数列 $\{c_n\}$ を構成できる。

以上より，$c_1=-3$ かつ $c_{100}=3$ であり，かつ ① を満たす数列 $\{c_n\}$ は存在する。

すなわち　真

以上より，(I)，(II)，(III) の真偽の組合せとして正しいものは　ト ④

参考 1.　(命題 A の証明)

$c_n \fallingdotseq -3$ …… ④ とする。

[1]　$n=1$ のとき

仮定より $c_1 \fallingdotseq -3$ であるから，④ を満たす。

[2]　$n=k$ のとき ④ を満たす，すなわち $c_k \fallingdotseq -3$ が成り立つと仮定する。

仮定より $(c_k+3)(2c_{k+1}-c_k+3)=0$，$c_k \fallingdotseq -3$ が成り立つから，$2c_{k+1}-c_k+3=0$，すなわち $c_{k+1}=\dfrac{c_k-3}{2}$ が成り立つ。

$c_k \fallingdotseq -3$ であるから　$c_{k+1} \fallingdotseq -3$

よって，$n=k+1$ のときにも ④ は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ④ は成り立つ。

参考 2.　漸化式

$$(c_n+3)(2c_{n+1}-c_n+3)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

について，$c_n=-3$ または $2c_{n+1}-c_n+3=0$ である。

(i) の ③ と同様に考えると，

① を満たす数列 $\{c_n\}$ について，$c_m=-3$ を満たす自然数 m が存在するとき，$c_{m-1}=c_{m-2}=\cdots\cdots=c_1=-3$ である。

漸化式 ① を満たす数列 $\{c_n\}$ について，$c_n=-3$ を満たす n のうち，最大のものを N とすると，$c_N=c_{N-1}=\cdots\cdots=c_1=-3$ である。

また，N より大きいすべての自然数 n に対して，命題 A と同様にして $c_n \fallingdotseq -3$ であることがわかるから，c_n は $2c_{n+1}-c_n+3=0$ を満たす。

(2) と同様に考えると，数列 $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n=\begin{cases} -3 & (n \leqq N) \\ (c_{N+1}+3)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N-1}-3 & (n>N) \end{cases}$$

となる。N が存在しないとき，すなわち $c_1 \fallingdotseq -3$ のときは $c_n=(c_1+3)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-3$ となり，(2) の数列 $\{b_n\}$ の一般項と同じになる。

数学Ⅱ・B　第５問

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3-2,\ 6-7,\ 0-(-1))=({}^{\text{ア}}1,\ {}^{\text{イウ}}-1,\ {}^{\text{エ}}1)$

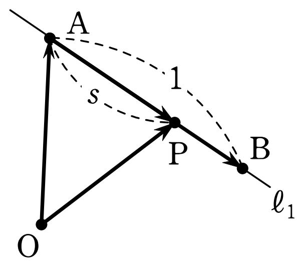
$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(-9-(-8),\ 8-10,\ -4-(-3))=(-1,\ -2,\ -1)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=1\times(-1)+(-1)\times(-2)+1\times(-1)=-1+2-1={}^{\text{オ}}0$

(2)　P が ℓ_1 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数があり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

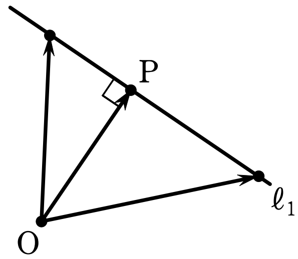
が成り立つ。（$^{\text{カ}}$ ②）



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2+s,\ 7-s,\ -1+s)$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2&=(2+s)^2+(7-s)^2+(-1+s)^2\\&=4+4s+s^2+49-14s+s^2+1-2s+s^2\\&={}^{\text{キ}}3s^2-{}^{\text{クケ}}12s+{}^{\text{コサ}}54\\&=3(s-2)^2+42\end{aligned}$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となるとき，直線 OP と ℓ_1 の関係に着目すると $\mathrm{OP}\perp\ell_1$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ が成り立つことがわかる。（$^{\text{シ}}$ ①）



よって，花子さんの考え方でも，太郎さんの考え方でも，$s={}^{\text{ス}}2$ のとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となることがわかる。

参考　（太郎さんの考え方の場合）

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(2+s)\times1+(7-s)\times(-1)+(-1+s)\times1\\&=2+s-7+s-1+s=3s-6\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となるとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから　$3s-6=0$

すなわち　$s={}^{\text{ス}}2$

(3)　Q が ℓ_2 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を満たす実数 t があり，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が成り立つ。

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(-8-t,\ 10-2t,\ -3-t)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(-s-t-10,\ s-2t+3,\ -s-t-2)$$

(2) の太郎さんと同様に考えると，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ が最小となるとき

直線 PQ と ℓ_1 の関係に着目すると　$\mathrm{PQ}\perp\ell_1$

直線 PQ と ℓ_2 の関係に着目すると　$\mathrm{PQ}\perp\ell_2$

すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ が成り立つ。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(-s-t-10)\times1+(s-2t+3)\times(-1)+(-s-t-2)\times1\\&=-3s-15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}&=(-s-t-10)\times(-1)+(s-2t+3)\times(-2)+(-s-t-2)\times(-1)\\&=6t+6\end{aligned}$$

であるから　$-3s-15=0$，$6t+6=0$

すなわち　　$s=-5$，$t=-1$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2+(-5),\ 7-(-5),\ -1+(-5))=(-3,\ 12,\ -6)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(-8-(-1),\ 10-2\times(-1),\ -3-(-1))=(-7,\ 12,\ -2)$

よって，線分 PQ の長さが最小になる P の座標は $(^{セソ}-3,\ ^{タチ}12,\ ^{ツテ}-6)$，Q の座標は $(^{トナ}-7,\ ^{ニヌ}12,\ ^{ネノ}-2)$ である。

$\boxed{\text{参考}}$ ((2) の花子さんの考え方の場合)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2&=(-s-t-10)^2+(s-2t+3)^2+(-s-t-2)^2\\&=s^2+t^2+100+2st+20t+20s+s^2+4t^2+9-4st-12t+6s\\&\qquad+s^2+t^2+4+2st+4t+4s\\&=3s^2+30s+6t^2+12t+113\\&=3(s+5)^2+6(t+1)^2+32\end{aligned}$$

よって，$s=-5$，$t=-1$ のとき $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ が最小となることがわかる。

(P，Q の座標省略)