数学Ⅱ・B　第 5 問

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3-2,\ 6-7,\ 0-(-1))=({}^{ア}1,\ {}^{イウ}-1,\ {}^{エ}1)$

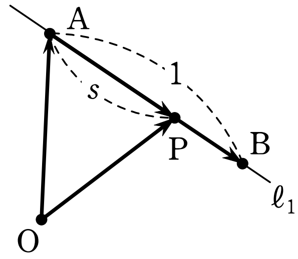
　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(-9-(-8),\ 8-10,\ -4-(-3))=(-1,\ -2,\ -1)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=1\times(-1)+(-1)\times(-2)+1\times(-1)=-1+2-1={}^{オ}0$

(2)　Pが ℓ_1 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数があり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

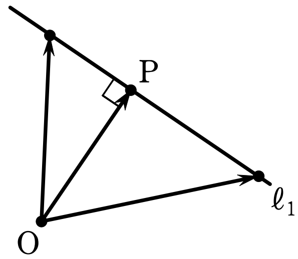
が成り立つ。(^{カ} ②)



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2+s,\ 7-s,\ -1+s)$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2&=(2+s)^2+(7-s)^2+(-1+s)^2\\&=4+4s+s^2+49-14s+s^2+1-2s+s^2\\&={}^{キ}3s^2-{}^{クケ}12s+{}^{コサ}54\\&=3(s-2)^2+42\end{aligned}$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となるとき，直線 OP と ℓ_1 の関係に着目すると $\mathrm{OP}\perp\ell_1$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ が成り立つことがわかる。(^{シ} ①)



よって，花子さんの考え方でも，太郎さんの考え方でも，$s={}^{ス}2$ のとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となることがわかる。

参考　(太郎さんの考え方の場合)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(2+s)\times1+(7-s)\times(-1)+(-1+s)\times1\\&=2+s-7+s-1+s=3s-6\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となるとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから　　$3s-6=0$

すなわち　　$s={}^{ス}2$

(3)　Q が ℓ_2 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を満たす実数 t があり，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が成り立つ。

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(-8-t,\ 10-2t,\ -3-t)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(-s-t-10,\ s-2t+3,\ -s-t-2)$$

(2) の太郎さんと同様に考えると，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ が最小となるとき

　直線 PQ と ℓ_1 の関係に着目すると　　$\mathrm{PQ}\perp\ell_1$

　直線 PQ と ℓ_2 の関係に着目すると　　$\mathrm{PQ}\perp\ell_2$

すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ が成り立つ。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(-s-t-10)\times1+(s-2t+3)\times(-1)+(-s-t-2)\times1\\&=-3s-15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}&=(-s-t-10)\times(-1)+(s-2t+3)\times(-2)+(-s-t-2)\times(-1)\\&=6t+6\end{aligned}$$

であるから　$-3s-15=0$，$6t+6=0$

すなわち　$s=-5$，$t=-1$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2+(-5),\ 7-(-5),\ -1+(-5))=(-3,\ 12,\ -6)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(-8-(-1),\ 10-2\times(-1),\ -3-(-1))=(-7,\ 12,\ -2)$

よって，線分 PQ の長さが最小になる P の座標は $(^{\text{セソ}}-3,\ ^{\text{タチ}}12,\ ^{\text{ツテ}}-6)$，Q の座標は $(^{\text{トナ}}-7,\ ^{\text{ニヌ}}12,\ ^{\text{ネノ}}-2)$ である。

$\boxed{\text{参考}}$　((2) の花子さんの考え方の場合)

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 &= (-s-t-10)^2+(s-2t+3)^2+(-s-t-2)^2\\
&= s^2+t^2+100+2st+20t+20s+s^2+4t^2+9-4st-12t+6s\\
&\qquad +s^2+t^2+4+2st+4t+4s\\
&= 3s^2+30s+6t^2+12t+113\\
&= 3(s+5)^2+6(t+1)^2+32
\end{aligned}
$$

よって，$s=-5$，$t=-1$ のとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$ が最小となることがわかる。

(P，Q の座標省略)