数学Ⅱ・B　第 4 問

(1)　$a_{n+1}=a_n+14$，$a_1=10$ より

$$a_2=a_1+14=10+14={}^{アイ}24$$

$$a_3=a_2+14=24+14={}^{ウエ}38$$

数列 $\{a_n\}$ は初項 a_1，公差 14 の等差数列であるから，一般項は

$$a_n=a_1+{}^{オカ}14(n-1)$$

(2)　$2b_{n+1}-b_n+3=0$ を変形すると　　$b_{n+1}+3=\dfrac{1}{2}(b_n+3)$

数列 $\{b_n+3\}$ は初項 b_1+3，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n+3=(b_1+3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって　　$b_n=(b_1+{}^{キ}3)\left(\dfrac{{}^{ク}1}{{}^{ケ}2}\right)^{n-1}-{}^{コ}3$

(3)　$(c_n+3)(2c_{n+1}-c_n+3)=0$　…… ①

(i)　$c_1=5$ のとき　　$(5+3)(2c_2-5+3)=0$　…… ②

整理すると　　$c_2-1=0$

よって　　$c_2={}^{サ}1$

$c_3=-3$ のとき　　$(c_2+3)\{2\cdot(-3)-c_2+3\}=0$　…… ③

整理すると　　$(c_2+3)^2=0$

よって　　$c_2={}^{シス}-3$

③ と同様に考えて　　$c_1={}^{セソ}-3$

(ii)　$c_3=-3$，$c_4=5$ のとき，(i)，② と同様に考えて　　$c_1=-3$，$c_2=-3$，$c_5={}^{タ}1$

$c_4=83$ のとき　　$(83+3)(2c_5-83+3)=0$

整理すると　　$c_5-40=0$

よって　　$c_5={}^{チツ}40$

(iii)　数学的帰納法により，

[1]　$c_1\fallingdotseq -3$

[2]　$n=k$ のとき $c_n\fallingdotseq -3$ が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときも $c_n\fallingdotseq -3$ が成り立つこと

の 2 つを示せば，命題 A が真であることが証明できる。

[1] は命題 A の仮定であるから，[2] を示せばよい。(^{テ} ③)

(iv)　(I)　$c_1=3\fallingdotseq -3$ であるから，命題 A よりすべての自然数 n について $c_n\fallingdotseq -3$ が成り立つ。

よって，$c_1=3$ かつ $c_{100}=-3$ であり，かつ ① を満たす数列 $\{c_n\}$ は存在しない。

すなわち　　偽

(II)　一般項が $c_n=-3$（$n=1$，2，3，……）であるような数列 $\{c_n\}$ は $c_1=-3$，

$c_{100}=-3$ であり，かつ ① を満たす。

よって　真

(III)　$c_1=c_2=\cdots\cdots=c_{99}=-3$，$c_{100}=3$ であるような数列 $\{c_n\}$ は，(i)，(ii) と同様に考えると，99 以下の自然数 n に対して ① を満たす。

また，101 以上の自然数 n に対して，c_{100} と ① から帰納的に c_n を定めることで ① を満たす数列 $\{c_n\}$ を構成できる。

以上より，$c_1=-3$ かつ $c_{100}=3$ であり，かつ ① を満たす数列 $\{c_n\}$ は存在する。

すなわち　真

以上より，(I)，(II)，(III) の真偽の組合せとして正しいものは　ト ④

参考 1.　(命題 A の証明)

$c_n \fallingdotseq -3$ …… ④ とする。

[1]　$n=1$ のとき

仮定より $c_1 \fallingdotseq -3$ であるから，④ を満たす。

[2]　$n=k$ のとき ④ を満たす，すなわち $c_k \fallingdotseq -3$ が成り立つと仮定する。

仮定より $(c_k+3)(2c_{k+1}-c_k+3)=0$，$c_k \fallingdotseq -3$ が成り立つから，$2c_{k+1}-c_k+3=0$，すなわち $c_{k+1}=\dfrac{c_k-3}{2}$ が成り立つ。

$c_k \fallingdotseq -3$ であるから　$c_{k+1} \fallingdotseq -3$

よって，$n=k+1$ のときにも ④ は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ④ は成り立つ。

参考 2.　漸化式

$$(c_n+3)(2c_{n+1}-c_n+3)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

について，$c_n=-3$ または $2c_{n+1}-c_n+3=0$ である。

(i) の ③ と同様に考えると，

① を満たす数列 $\{c_n\}$ について，$c_m=-3$ を満たす自然数 m が存在するとき，$c_{m-1}=c_{m-2}=\cdots\cdots=c_1=-3$ である。

漸化式 ① を満たす数列 $\{c_n\}$ について，$c_n=-3$ を満たす n のうち，最大のものを N とすると，$c_N=c_{N-1}=\cdots\cdots=c_1=-3$ である。

また，N より大きいすべての自然数 n に対して，命題 A と同様にして $c_n \fallingdotseq -3$ であることがわかるから，c_n は $2c_{n+1}-c_n+3=0$ を満たす。

(2) と同様に考えると，数列 $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n=\begin{cases} -3 & (n \leqq N) \\ (c_{N+1}+3)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N-1}-3 & (n>N) \end{cases}$$

となる。N が存在しないとき，すなわち $c_1 \fallingdotseq -3$ のときは $c_n=(c_1+3)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-3$ となり，(2) の数列 $\{b_n\}$ の一般項と同じになる。